Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc.Bianka Dorová

Investiční problémy se stochastickou dominancí v omezeních

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Studijní plán: Ekonometrie

2013

Ďakujem všetkým, ktorí ma podporovali pri písaní diplomovej práce. Hlavné poďakovanie patrí môjmu vedúcemu, RNDr. Ing. Milošovi Kopovi Ph.D., ktorý sa mi celý čas trpezlivo venoval a veľmi mi pomohol s pochopením príslušnej tematiky.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa .... Bc.Bianka Dorová

Obsah

Název práce: Investiční problémy se stochastickou dominancí v omezeních
Autor: Bc.Bianka Dorová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
E-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce je zaměřená na stochastickou dominanci v úlohách optimalizace portfolia. V práci jsou shrnuty hlavní poznatky z oblasti optimalizace portfolia a užitkových funkcí, dále se práce zabývá stochastickou dominancí prvního až nekonečného řádu a je zde zavedeno Postovo, Kuosmanenovo a Kopovo kriterium eficience portfolia a nutné a postačující podmínky stochastické dominance pro absolutně spojitá a diskrétní rozdělení. V práci je také možné najít mnohé formulace úloh optimalizace portfolia s omezeními ve tvaru stochastické dominance druhého řádu. Součástí práce je i praktická aplikace, ve které jsou již zpomínané formulace řešené pro měsíční výnosnosti českých akcií pomocí optimalizačního softwaru GAMS.

Klíčová slova: stochastická dominance, portfolio, eficientní portfolio, SSD kritérium

Title: Investment problems with stochastic dominance constraints
Author: Bc.Bianka Dorová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This thesis focuses on stochastic dominance in portfolio selection problems. The thesis recalls basic knowledge from the area of portfolio optimization with utility functions and first, second, N-th and infinite order of stochastic dominance. It sumarizes Post's, Kuosmanen's and Kopa's criteria for portfolio efficiency and necessary and sufficient conditions of stochastic dominance for discrete and continuous probability distributions. The thesis also contains formulations of optimization problems with second order stochastic dominance constraints derived for discrete and continuous probability distributions. A practical application is also a part of the thesis, where the optimization problems for monthly returns of Czech stocks are solved using optimization software GAMS.

Keywords: stochastic dominance, portfolio, efficient portfolio, SSD criterion

Kapitola 1

Úvod

Jedným z najdôležitejších rozhodnutí investora je zostaviť pre neho v určitom zmysle vhodné portfólio z investičných príležitostí, ktoré sú mu k dispozícii. To znamená, že zostavené portfólio by malo odpovedať jeho vzťahu k riziku a predstave o výnose. Základy teórie portfólia položil Markowitz [20] v roku 1952, ktorého prístup je založený na maximalizácii výnosu a minimalizácii rizika portfólia. Jedným z predpokladov Markowitzovej teórie je predpoklad identického správania sa investorov (tj. všetci investori majú podľa Markowitza rovnaké preferencie). Markowitzovu teóriu nasledovalo zahrnutie úžitkových funkcií [30] a stochastickej dominancie [18] do optimalizácie portfólia. Podľa preferencií rozlišujeme napríklad investorov uprednostňujúcich riziko, rizikovo averzných, rizikovo neutrálnych, apod. Preferencie investora sú teda reprezentované určitou triedou úžitkových funkcií, ktoré odpovedajú triedám stochastickej dominancie. Čím vyššiemu rádu stochastickej dominancie investor odpovedá, tým viac informácií máme o investorovi (jeho úžitkovej funkcii).
Nasledujúcou oblasťou záujmu sa na prelome tisícročia stal vzťah miery rizika Conditional Value at Risk (CVaR) a stochastickej dominancie druhého rádu [25], [27].
Hlavnými zdrojmi pre potreby tejto práce pre nás boli publikácia [30] ktorá sa venuje teórii úžitkových funkcií, [18] ktorá je zameraná na stochastickú dominanciu, v článku [15] je ukázaný vzťah medzi stochastickou dominanciou a CVaR-om (touto tematikou sa taktiež zaoberali práce [25] a [27]) a práce [15], [17] a [24] sa venujú kritériám eficiencie portfólia. Táto práca zčasti nadväzuje na predchádzajúce diplomové práce, ktoré sa venovali [6] vplyvom voľby generátoru stochastickej dominancie na eficienciu portfólií, [22] stochastickej dominancii vyšších rádov, [12] semi-infinitnému programovaniu vo vzťahu k eficientným portfóliám a [16] eficiencii portfólií pri spojitom rozdelení výnosov.

Táto práca je členená nasledovne:
V druhej kapitole zavádzame základné pojmy a súvislosti z oblasti optimalizácie portfólia. Zamerali sme sa hlavne na úžitkové funkcie a postoj investora k riziku a uviedli praktický príklad využitia úžitkových funkcií v úlohách optimalizácie portfólia.
Tretia kapitola je zameraná na stochastickú dominanciu. Zaoberali sme sa stochastickou dominanciou prvého, druhého, N-tého až nekonečného rádu a formulovali nutné a postačujúce podmienky stochastickej dominancie pre diskrétne rozdelenie s rovnako pravdepodobnými atómami. Taktiež sme sa zamerali na podmienky eficiencie portfólií a predstavili Postovo, Kuosmanenovo a Kopovo kritérium. V poslednej časti tejto kapitoly sme zaviedli nutné a postačujúce podmienky stochastickej dominancie pre normálne, lognormálne a gamma rozdelenie a taktiež sme odvodili podmienky FSD a SSD dominancie pre exponenciálne rozdelenie.
V štvrtej kapitole sa venujeme formulácii optimalizačných úloh. Zamerali sme sa na formulácie úloh so stochastickou dominanciou druhého rádu v obmedzeniach, uviedli základnú formuláciu z práce [3] (a jej prevod na úlohu lineárneho programovania) a odvodili ďalšie formulácie pre diskrétne rozdelenie založené na rôznych preferenciách investora. Pri formulácii ďalších úloh sme využili aj vzťah stochastickej dominancie druhého rádu a miery rizika Conditional Value at Risk. Sformulovali sme model, ktorý sa zameriava na maximalizáciu rozdielu CVaR-ov referenčného aktíva a hľadaného portfólia. Optimalizačnú úlohu sme odvodili pre diskrétne scénáre aj pre normálne, Študentovo a všeobecné eliptické rozdelenie.
V poslednej kapitole sme formulácie zo štvrtej kapitoly vyriešili pomocou optimalizačného softvéru GAMS. Úlohy sme riešili pre mesačné výnosnosti vybraných českých akcií a za referenčné portfólio sme zvolili index PX.

Kapitola 2

Úvod do tematiky optimalizácie portfólia

V tejto úvodnej kapitole diplomovej práce sa zoznámime so základmi tematiky optimalizácie portfólia, zavedieme elementárne pojmy a pokúsime sa čitateľovi priblížiť problematiku výberu optimálneho portfólia. Zavedieme pravdepodobnostné definície a vzťahy potrebné pre pochopenie príslušnej tematiky. Táto kapitola bude čerpať z predchádzajúcej práce autorky [5] a bude doplňovaná ďalšími dôležitými poznatkami z uvažovanej oblasti.

2.1 Základné pravdepodobnostné definície

Definícia 2.1 ([10]) *Nech $(\Omega, \mathcal{A})$ je merateľný priestor. Pravdepodobnosť P je definovaná ako miera na sigma algebre $\mathcal{A}$ s vlastnosťou $P(\Omega) = 1$, tj. P je množinová funkcia na $\mathcal{A}$ s vlastnosťami*

$$P(A) \geq 0, A \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0 \tag{2.2}$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{2.3}$$

ak je A_n postupnosť po dvoch disjunktných javov. Trojicu (Ω, A, P) potom nazývame pravdepodobnostný priestor.

Teraz zadefinujeme náhodnú veličinu na tomto priestore a jej distribučnú a kvantilovú funkciu.

Definícia 2.2 ([10]) *Náhodnú veličinu definujeme ako merateľnú reálnu funkciu*

$$Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \tag{2.4}$$

kde $\mathcal{B}$ je sigma algebra borelovských podmnožín.

Definícia 2.3 ([10]) *Nech X je náhodná veličina. Jej distribučná funkcia F_X je definovaná vzťahom*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2.5}$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Definícia 2.4 ([15]) *Kvantilová funkcia $Q_{F_X}(p)$ prislúchajúca náhodnej veličine X s distribučnou funkciou F_X je definovaná nasledovne*

$$Q_{F_X}(p) = min\{u : F_X(u) \geq p\}. \tag{2.6}$$

2.2 Úžitkové funkcie

Pod pojmom úžitkové funkcie rozumieme matematické funkcie, pomocou ktorých aproximujeme postoj investora voči riziku. Konkrétnejšie je úžitková funkcia $u : I \to \mathbb{R}$ spojitá a neklesajúca funkcia na intervale $I \subseteq \mathbb{R}$, ktorá priraďuje bohatstvu investora úžitok, ktorý z neho má. V praxi sa stali značne obľúbenými, pretože ich použitím sa riešenia úlohy optimalizácie portfólia zjednodušili. V tejto podkapitole uvedieme niekoľko základných definícií a viet o úžitkových funkciách. Je zaujímavé si všimnúť, že z nich plynie, že na vzťah investora voči riziku vplýva len hladina majetku investora a zvolená úžitková funkcia. Nemá naň však vplyv daná investičná príležitosť. Keďže konkrétny investor môže byť na rôznych úrovniach majetku rizikovo averzný, obľubujúci riziko alebo neutrálny, vzťah voči riziku je lokálnou vlastnosťou.

Definícia 2.5 ([13]) *Nech $u : I \to \mathbb{R}$ je úžitková funkcia, t.j. spojitá, neklesajúca funkcia na intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Nech W je hladina majetku investora a nech investičná* *príležitosť e je náhodná veličina s rozdelením P, pre ktorú existujú stredné hodnoty $Eu(W+e)$ a Ee. Ak pre každú investičnú príležitosť platí*

$$Eu(W+e) < u(W+Ee) \tag{2.7}$$

potom hovoríme, že investor s úžitkovou funkciou u je rizikovo averzný na úrovni majetku W.

Investor s úžitkovou funkciou u je obľubujúci riziko na úrovni majetku W, ak je pre každú investičnú príležitosť splnená nerovnosť

$$Eu(W+e) > u(W+Ee). \tag{2.8}$$

Hovoríme, že investor je rizikovo neutrálny na hladine majektu W, ak pre jeho úžitkovú funkciu a každú investičnú príležitosť platí rovnosť

$$Eu(W+e) = u(W+Ee). \tag{2.9}$$

Definícia 2.6 ([13]) *Investor sa nazýva globálne rizikovo averzný (prípadne neutrálny alebo obľubujúci riziko), ak je rizikovo averzný (prípadne neutrálny alebo obľubujúci riziko) na každej hladine majetku W.*

Veta 2.1 ([13]) *Investor je*
(i) globálne rizikovo averzný vtedy a len vtedy, keď je jeho úžitková funkcia striktne konkávna na intervale I,

(ii) globálne rizikovo neutrálny vtedy a len vtedy, keď je jeho úžitková funkcia lineárna na intervale I,

(iii) globálne obľubujúci riziko vtedy a len vtedy, keď je jeho úžitková funkcia striktne konvexná na intervale I.

Definíciu konvexnej a konkávnej funkcie je možné nájsť v práci [13].

Veta 2.2 ([13]) *Nech je úžitková funkcia $u : I \to \mathbb{R}$ dvakrát diferencovateľná. Potom je investor*

(i) globálne rizikovo averzný, ak je druhá derivácia funkcie u záporná,

(ii) globálne rizikovo neutrálny, ak je druhá derivácia funkcie u nulová,

(iii) globálne obľubujúci riziko, ak je druhá derivácia funkcie u kladná.

2.3 Miery rizikovej averzie

V tejto podkapitole sa zoznámime s charakteristikou investora, ktorá je špecifická tým, že nezávisí na investičnej príležitosti, ktorú investor zvažuje, ale závisí len na úrovni jeho majetku. Touto charakteristikou je miera rizikovej averzie, ktorú zadefinujeme v nasledujúcich tvrdeniach. Predpokladajme, že sa obmedzíme len na 2-krát diferencovateľné úžitkové funkcie $u(x)$.

Veta 2.3 ([13]) *Nech $u : I \to \mathbb{R}$ je úžitková funkcia investora. Potom funkcia $r(x)$ s definičným oborom I, pre ktorú platí:*

$$\mathrm{r(x)} = -\frac{u^{"}(x)}{u^{'}(x)} = -\frac{d}{dx}\mathrm{log\ u'(x)} \tag{2.10}$$

sa nazýva miera absolútnej rizikovej averzie alebo Arrow - Prattova absolútne rizikovo averzná miera.

Veta 2.4 ([13]) *Pre mieru absolútnej rizikovej averzie (tj. pre ARA mieru) platí :*

(i) $r(x) > 0$ pre rizikovo averzného investora na hladine x,

(ii) $r(x) = 0$ pre rizikovo neutrálneho investora na hladine x,

(iii) $r(x) < 0$ pre riziko obľubujúceho investora na hladine x.

2.4 Príklad využitia úžitkových funkcií v rozhodovacích problémoch

Zahrnutím úžitkovej funkcie do optimalizačného modelu dostávame úlohu maximalizácie očakávaného úžitku z koncového majetku.

Model optimalizácie portfólia s použitím úžitkových funkcií [5]

$$\max Eu(y + R(\boldsymbol{\lambda})) \tag{2.11}$$

$$\text{za podmienky:}$$

$$\mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = y$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., N$$

kde u je úžitková funkcia investora, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ sú váhy portfólia, $R(\boldsymbol{\lambda})$ značí výnos portfólia a y je počiatočný majetok investora.

Podmienka $\lambda_i \geq 0$ značí, že nie sú pripustené krátke predaje (tzv. short sales). Ak by sme chceli pripustiť krátke predaje i-teho aktíva do výšky y podmienku zmeníme na $\lambda_i \geq -1$.

Kapitola 3

Stochastická dominancia

V tejto kapitole sa zoznámime s kritériami stochastickej dominancie. Predpokladajme, že investor má neklesajúcu úžitkovú funkciu u s nezápornou deriváciou. Tento predpoklad zabezpečuje, že investor vždy uprednostní väčší zisk pred menším. Označme U množinu všetkých úžitkových funkcií. Pre $\tilde{U} \subseteq U$ definujeme stochastickú dominanciu nasledovne:

Definícia 3.1 ([6]) *Hovoríme, že náhodná veličina X_F dominuje náhodnú veličinu X_G vzhľadom k $\tilde{U}$, ak $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ pre všetky $u \in \tilde{U}$, pre ktoré je táto nerovnosť definovaná. Tento vzťah značíme $X_F \succeq_{\tilde{U}} X_G$. Množinu $\tilde{U}$ potom voláme generátorom stochastickej dominancie $\succeq_{\tilde{U}}$.*

Definícia 3.2 ([6]) *Hovoríme, že náhodná veličina X_F striktne dominuje náhodnú veličinu X_G vzhľadom k $\tilde{U}$, ak $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ pre všetky $u \in \tilde{U}$, pre ktoré je táto nerovnosť definovaná a existuje $u_0 \in \tilde{U}$, že $Eu_0(X_F) > Eu_0(X_G)$. Tento vzťah značíme $X_F \succ_{\tilde{U}} X_G$.*

3.1 Stochastická dominancia prvého rádu - FSD

Predpokladajme, že pracujeme s 2 náhodnými veličinami, ktoré majú distribučné funkcie F a G. V tejto podkapitole budeme naďalej pracovať s množinou U. Nasledujúce definície a vety uvádzame v súlade s Levy [18].

Definícia 3.3 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom X_F dominuje X_G podľa FSD (značíme $X_F \succ_{FSD} X_G$), ak $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ pre všetky $u \in U$, pre ktoré existujú stredné hodnoty $Eu(X_F)$ a $Eu(X_G)$ a existuje aspoň jedna $u_0 \in U$, pre ktorú je splnená ostrá nerovnosť.*

Veta 3.1 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom X_F dominuje X_G vzhľadom k FSD, práve vtedy keď $F(x) \leq G(x)$ pre všetky hodnoty x a existuje aspoň jedna hodnota x_0, pre ktorú platí ostrá nerovnosť.*

Poznámka Ak zadefinujeme funkciu $I_1(x) = G(x) - F(x)$, tak X_F dominuje X_G vzhľadom k FSD práve vtedy, keď $I_1(x) \geq 0$ pre všetky hodnoty x a existuje aspoň jedna hodnota x_0, pre ktorú platí ostrá nerovnosť.

Veta 3.2 *Náhodná veličina X_F dominuje náhodnú veličinu X_G vzhľadom k FSD, ak platí $Min_F(x) \geq Max_G(x)$.*

Veta 3.3 *Náhodná veličina X_F dominuje náhodnú veličinu X_G vzhľadom k FSD, ak platí $F(x) \leq G(x)$ a existuje aspoň jedna hodnota x_0, pre ktorú platí $F(x_0) + a \leq G(x_0)$, kde a je kladná konštanta.*

Veta 3.4 *Ak náhodná veličina X_F dominuje náhodnú veličinu X_G vzhľadom k FSD, tak platí $EX_F > EX_G$.*

Veta 3.5 *Ak náhodná veličina X_F dominuje náhodnú veličinu X_G vzhľadom k FSD, tak $Min_F(x) \geq Min_G(x)$.*

Veta 3.6 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom F dominuje G podľa FSD (tj. $X_F \succ_{FSD} X_G$), práve vtedy keď platí $Q_F(p) \geq Q_G(p)$ pre všetky $0 \leq p \leq 1$ a existuje aspoň jedna hodnota p_0, pre ktorú platí ostrá nerovnosť.*

3.2 Stochastická dominancia druhého rádu - SSD

Na rozdiel od predpokladov FSD, kde sme požadovali všetky $u \in U$, pridávame predpoklad rizikovej averzie, ktorý sme definovali v druhej kapitole. Definujme preto množinu všetkých konkávnych úžitkových funkcií prislúchajúcich rizikovo averzným investorom a označme ju $U_2 = \{u : u \in U, u \text{ je konkávna funkcia}\}$. Nasledujúce definície a vety uvádzame v súlade s Levy [18].

Definícia 3.4 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom X_F dominuje X_G podľa SSD (značíme $X_F \succ_{SSD} X_G$), ak $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ pre všetky $u \in U_2$, pre ktoré existujú stredné hodnoty $Eu(X_F)$ a $Eu(X_G)$ a existuje aspoň jedna $u_0 \in U_2$ pre ktorú je splnená ostrá nerovnosť.*

Veta 3.7 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom portfólio X_F dominuje X_G podľa SSD ak platí*
$I_2(x) = \int_{-\infty}^{x}[G(t) - F(t)]dt \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a existuje aspoň jedna hodnota x_0, pre ktorú platí ostrá nerovnosť.

Veta 3.8 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G a k nim prislúchajúce kvantily označme $Q_F(p)$ a $Q_G(p)$. Potom X_F dominuje X_G podľa SSD, práve vtedy keď platí $\int_0^p[Q_F(t) - Q_G(t)]dt \geq 0$ pre všetky $0 \leq p \leq 1$ a existuje aspoň jedna hodnota p_0, pre ktorú platí ostrá nerovnosť.*

Aby sme mohli zaviesť kritérium stochastickej dominancie druhého rádu aj pomocou miery rizika CVaR (Conditional Value at Risk), zavedieme najprv definíciu miery rizika VaR (Value at Risk) a už spomínaného CVaR-u.

Definícia 3.5 ([25]) *Pre hladinu $\alpha \in [0, 1)$ definujeme*

$$VaR_\alpha(X) = inf(l \in \mathbb{R} : P(X > l) \leq 1 - \alpha). \tag{3.1}$$

Ak uvažujeme náhodnú veličinu X so spojitou distribučnou funkciou, tak náhodná strata väčšia ako VaR je realizovaná s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$.

Definícia 3.6 ([25]) *Pre hladinu $\alpha \in [0, 1)$ definujeme $CVaR_\alpha(X)$ ako strednú hodnotu náhodnej veličiny s distribučnou funkciou*

$$G_\alpha(x) = \frac{F_X(x) - \alpha}{1 - \alpha}\mathbb{I}[x \geq VaR_\alpha(X)]. \tag{3.2}$$

Veta 3.9 ([27]) *Nech Nech $Y_i = -X_i$ a $\mathbb{E}|Y_i| < \infty$ pro $i = 1, 2$.*
Potom $X_1 \succ_{SSD} X_2 \Leftrightarrow CVaR_\alpha(Y_1) \leq CVaR_\alpha(Y_2), \forall \alpha \in [0, 1]$.

Veta 3.10 ([3]) *Predpokladajme, že náhodná veličina X_F má diskrétne realizácie x_t, t=1,...,T a X_G je náhodná veličina. Potom $X_G \succ_{SSD} X_F$ platí práve vtedy keď,*

$$\mathbb{E}[(x_t - X_G)_+] \leq \mathbb{E}[(x_t - X_F)_+], \quad t = 1, ..., T. \tag{3.3}$$

Dôkaz. je možné nájsť v práci [3]. ■

Definícia 3.7 *Uvažujme náhodnú veličinu* X_F *s distribučnou funkciou* $F(X_F, x) = P(X_F \leq x)$. *Definujme funkciu* $F_2(X_F, x)$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$ *vzťahom* $F_2(X_F, x) = \int_{-\infty}^{x} F(X_F, z)dz$.

Veta 3.11 *Nech* X_F *a* X_G *sú náhodné veličiny (s distribučnými funkciami* F *a* G*). Potom* $X_F \succ_{SSD} X_G$, *ak* $F_2(X_F, x) \leq G_2(X_G, x)$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$ *a existuje aspoň jedna hodnota* x_0, *pre ktorú platí ostrá nerovnosť.*

Postačujúce podmienky dominancie SSD

1. Dominancia FSD je postačujúcou podmienkou pre dominanciu SSD.
2. $Min_F(x) > Max_G(x)$ je postačujúca podmienka pre dominanciu SSD.
3. Náhodná veličina X_F dominuje náhodnú velicinu X_G podľa SSD, ak platí $\int_a^x [G(t) - F(t)]dt \geq k$ pre všetky hodnoty x kde $k > 0$.

Nutné podmienky pre dominanciu SSD

1. Podmienka $EX_F \geq EX_G$ je nutnou podmienkou pre dominanciu X_F nad X_G podla SSD .
2. Nutnou podmienkou pre dominanciu $X_F \succ_{SSD} X_G$ je platnosť $Min_F(x) \geq Min_G(x)$.

3.3 Stochastická dominancia tretieho rádu - TSD

Stochastická dominancia vyššieho rádu ako druhého už pre našu prácu nebude kľúčová, preto si dovolíme zjednodušiť definíciu množiny úžitkových funkcií a zadefinujeme ju nasledovne: $U_3 = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u' \geq 0,\ u'' \leq 0 \text{ a } u''' \geq 0\}$. Nasledujúce definície a vetu uvádzame v súlade s Levy [18].

Definícia 3.8 *Nech* X_F *a* X_G *sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami* F *a* G. *Potom* $X_F \succ_{TSD} X_G$, *ak* $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ *pre všetky* $u \in U_3$, *pre ktoré existujú stredné hodnoty* $Eu(X_F)$ *a* $Eu(X_G)$ *a existuje aspoň jedna* $u_0 \in U_3$, *pre ktorú je splnená ostrá nerovnosť.*

Definícia 3.9 *Uvažujme náhodnú veličinu X_F s distribučnou funkciou $F(X_F, x) = P(X_F \leq x)$. Definujme funkciu $F_3(X_F, x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ vzťahom $F_3(X_F, x) = \int_{-\infty}^{x} F_2(X_F, z)dz$ (funkciu $F_2(X_F, x)$ sme definovali v predchádzajúcej podkapitole).*

Veta 3.12 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom $X_F \succ_{TSD} X_G$, práve vtedy keď $F_3(x) - G_3(x) \leq 0$ pre všetky reálne x a zároveň $EX_F \geq EX_G$ pričom aspoň jedna nerovnosť musí byť splnená ako ostrá.*

3.4 Stochastická dominancia vyšších rádov

Zovšeobecnením stavby množiny U_3 sa dostávame k tvaru množiny úžitkových funkcií pre stochastickú dominanciu N-tého rádu $U_N = \{u : (-1)^{n-1}u^{(n)} \geq 0, n = 1, ..., N\}$, takže U_N je množina úžitkových funkcií s nezápornými nepárnymi deriváciami a s nekladnými párnymi deriváciami až do rádu N. Analogicky je možné definovať aj množinu $U_\infty = \{u : (-1)^{n-1}u^{(n)} \geq 0, n = 1, ..., \infty\}$. Nasledujúce definície zavádzame v súlade s Levy [18] a Whitmore [28].

Definícia 3.10 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom $X_F \succ_{NSD} X_G$, ak $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ pre všetky $u \in U_N$, pre ktoré existujú stredné hodnoty $Eu(X_F)$ a $Eu(X_G)$ a existuje aspoň jedna $u_0 \in U_N$ pre ktorú je splnená ostrá nerovnosť.*

Definícia 3.11 *Nech X_F a X_G sú náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom $X_F \succ_{ISD} X_G$, ak $Eu(X_F) \geq Eu(X_G)$ pre všetky $u \in U_\infty$, pre ktoré existujú stredné hodnoty $Eu(X_F)$ a $Eu(Y_G)$ a existuje aspoň jedna $u_0 \in U_\infty$ pre ktorú je splnená ostrá nerovnosť.*

3.5 Algoritmy stochastickej dominacie pre diskrétne rozdelenie s rovnako pravdepodobnými atómami

Pri overovaní kritérií stochastickej dominancie sa mnohokrát stretávame s komplikáciami v súvislosti s veľkým počtom porovnaní, ktoré overenie kritérií vyžaduje. Bude nás zaujímať ako sa im vyhnúť a počet nutných porovnaní minimalizovať. Najprv v tejto podkapitole predstavíme jednoduché algoritmy overujúce FSD a SSD, ktoré v roku 1969 formulovali páni Levy a Hanoch.

3.5.1 Algoritmus FSD

Predpokladajme, že náhodné veličiny X_F aj X_G sú diskrétne rozdelené (s rovnako pravdepodobnými atómami) a označme ich realizácie v poradí f a g.
Potom môžeme pozorovania zoradiť vzostupne:
$f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n$
$g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_n$.

Potom X_F dominuje X_G podľa FSD práve vtedy keď platí $f_i \geq g_i$ pre všetky $i = 1, ..., n$ a z nich aspoň jedna nerovnosť je ostrá.

3.5.2 Algoritmus SSD

Rovnako ako pri algoritme FSD predpokladáme, že náhodné veličiny X_F aj X_G sú diskrétne rozdelené (s rovnako pravdepodobnými atómami), označíme ich realizácie znova f a g a zoradíme ich vzostupne.
Potom zadefinujeme F_i, $i = 1, ..., n$ nasledovne:

$$F_1 = f_1, F_2 = f_1 + f_2, ..., F_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$$

a G_i, $i = 1, ..., n$ zadefinujeme analogicky.

Potom X_F dominuje X_G podľa SSD práve vtedy keď platí $F_i \geq G_i$ pre všetky $i = 1, ..., n$ a z nich aspoň jedna nerovnosť je ostrá.

Je dôležité poznamenať, že algoritmy FSD a SSD sú vhodné pre párové porovnávanie, ale pre hľadanie eficientnej množiny sú nepoužiteľné, pretože by sme museli urobiť nekonečný počet porovnaní dvojíc portfólií. Tento nedostatok algoritmov FSD a SSD nás vedie ku kritériám eficiencie portfólií, ktorými sa budeme zaoberať v ďalšej podkapitole.

3.6 Kritériá eficiencie portfólií

Teraz sa už presunieme k eficiencii lineárnych kombinácií náhodných veličín. Náhodnými veličinami rozumieme náhodné výnosy aktív. Najprv sa budeme zaoberať scenárovým prístupom testovania eficiencie a potom sa zameriame aj na eficienciu portfólií za predpokladu znalosti pravdepodobnostného rozdelenia portfólií. Najviac skúmanou oblasťou je eficiencia vzhľadom k SSD, pre ktorú uvedieme Postovo, Kuosmanovo a Kopovo kritérium. Touto tematikou sa do väčšej hĺbky zaoberá práca [22].

Pomocou matice $\mathbf{X}$, ktorá má T riadkov (počet scénárov) a N stĺpcov (počet aktív) označme miery výnosnosti investícií za platnosti rôznych scénárov. Všimnime si, že t-ty riadok matice (značíme x_t) predstavuje výnos portfólia pre t-ty scénár a n-tý stĺpec matice predstavuje výnosy n-tého aktíva pri všetkých scénároch. Predpkladajme, že scénáre sú rovnako pravdepodobné.
Voľbou váh $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_N)^T$ pre jednotlivé aktíva vytvára investor portfóliá. Váha prislúchajúca k aktívu určuje akú časť kapitálu investor investuje do daného aktíva. Množinu prípustných riešení definujeme nasledovne

$$\Lambda = [\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., N]. \tag{3.4}$$

Množina obsahuje všetky možnosti ako zostaviť porfólio z vybranej množiny aktív. Podmienka $\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1$ zabezpečuje, že bude investovaný celý kapitál a podmienka $\lambda_i \geq 0$ zakazuje krátke predaje.
Pod pojmom výnosu portfólia $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ budeme rozumieť

$$\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{N} r_i \lambda_i, \tag{3.5}$$

kde $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_N)^T$ je náhodný vektor výnosov N aktív z matice $\mathbf{X}$.
Pre potrebu nasledujúcich tvrdení usporiadajme výnosy portfólií od najmenšieho po najväčší. Ak označíme $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda})^{[i]}$ ako i-ty najmenší výnos portfólia, tak dostávame

$$(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda})^{[1]} \leq ... \leq (\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda})^{[T]}. \tag{3.6}$$

Skrátene budeme hovoriť, že jedno portfólio dominuje druhé portfólio, ak výnos prvého portfólia dominuje výnos druhého portfólia. Definície prijateľného, striktne prijateľného a optimálneho portfólia sú analogické definíciám pre investície.

Veta 3.13 ([19]) *Nech $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Lambda}$ sú portfóliá. Potom $\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} \succeq_{FSD} \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\tau}$ práve vtedy, keď $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda})^{[i]} \geq (\boldsymbol{X}\boldsymbol{\tau})^{[i]}$ pre $i = 1, ..., T$.*

Veta 3.14 ([19]) *Nech $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Lambda}$ sú portfóliá. Potom $\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} \succeq_{SSD} \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\tau}$ práve vtedy, keď $\sum_{t=1}^{i}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda})^{[t]} \geq \sum_{t=1}^{i}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\tau})^{[t]}$ pre $i = 1, ..., T$.*

Uvedené algoritmy testovania stochastickej dominancie sú použiteľné len pre párové porovnanie portfólií, preto zavedieme už spomínané Postovo, Kuosmanenovo a Kopovo kritériá eficiencie portfólia.

3.6.1 Postovo kritérium eficiencie portfólia

Pre potreby Postovho kritéria, zoradíme scénáre, tak aby platilo $\boldsymbol{x_t\lambda} = [\boldsymbol{X\lambda}]^t, t = 1, ..., T$. Postovo kritérium SSD eficiencie portfólia vychádza z nasledujúcej definície.

Definícia 3.12 ([24]) *Portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Lambda}$ je striktne SSD neeficientné, ak existuje portfólio $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, také že $\mathbb{E}u(\boldsymbol{r^T\lambda}) > \mathbb{E}u(\boldsymbol{r^T\tau})$ pre každú úžitkovú funkciu $u \in U_2^S$, kde $U_2^S \subset U_2$, je množina rýdzo konkávnych úžitkových funkcií. V opačnom prípade hovoríme, že je portfólio $\boldsymbol{\tau}$ striktne SSD eficientné.*

K vysloveniu kritéria potrebujeme uviesť nasledujúcu optimalizačnú úlohu:

$$\xi(\boldsymbol{\lambda}) = min_{\theta,\beta}\theta \tag{3.7}$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} \frac{\beta_t(\boldsymbol{x_t\lambda} - x_n^t)}{T} + \theta \geq 0, &\quad n = 1, 2, ..., N \\ \beta_{t+1} - \beta_t \geq 0, &\quad t = 1, 2, ..., T-1 \\ \beta_t \geq 0, &\quad t = 1, 2, ..., T-1 \\ &\quad \beta_T = 1 \end{aligned}$$

Veta 3.15 ([24]) *Portfólio $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ je striktne SSD eficientné, práve vtedy keď $\xi(\boldsymbol{\lambda}) = 0$.*

3.6.2 Kuosmanenovo kritérium eficiencie portfólia

Kuosmanovo kritérium SSD eficiencie je založené na nasledujúcich dvoch optimalizačných úlohách.

Prvá úloha lineárneho programovania:

$$\theta^N(\tau) = \max_{W,\boldsymbol{\lambda}} \frac{\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{x_t\lambda} - \boldsymbol{x_t\tau})}{T} \tag{3.8}$$

za podmienok

$$\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{\lambda} \geq \sum_{j=1}^{T} w_{ij}\boldsymbol{x_j}\boldsymbol{\tau} \quad i = 1, ..., T$$
$$W \in \Xi$$
$$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$$

kde

$$\Xi = \{[w_{ij}]_{T\times T} : 0 \leq w_{ij} \leq 1, \sum_{i=1}^{T} w_{ij} = \sum_{j=1}^{T} w_{ij} = 1, \forall i, j = 1, ..., T\}$$

značí množinu dvojito stochastických matíc.

Druhá úloha lineárneho programovania:

$$\theta^S(\boldsymbol{\tau}) = \min_{W,\boldsymbol{\lambda},S^+,S^-} \sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T}(s_{ij}^+ + s_{ij}^-) \tag{3.9}$$

za podmienok

$$\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{j=1}^{T} w_{ij}\boldsymbol{x_j}\boldsymbol{\tau}, \quad i = 1, ..., T$$
$$s_{ij}^+ - s_{ij}^- = w_{ij} - \frac{1}{2}, \quad i, j = 1, ..., T$$
$$s_{ij}^+, s_{ij}^- \geq 0, \quad i, j = 1, ..., T$$
$$W \in \Xi$$
$$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$$

kde $S^+ = \{s_{ij}^+\}_{i,j=1}^T$, $S^- = \{s_{ij}^-\}_{i,j=1}^T$ a $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^T$. A označme počet hodnôt vektoru výnosov $\boldsymbol{X\tau}$, ktoré sa opakujú práve k-krát ako ϵ_k.

Veta 3.16 ([17]) *Nutnou podmienkou SSD eficiencie portfólia $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Lambda}$ je $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$.*

Veta 3.17 ([17]) *Nutná a postačujúca podmienka SSD eficiencie portfólia $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Lambda}$ je $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$ a $\theta^S(\boldsymbol{\tau}) = \frac{T^2}{2} - \sum_{k=1}^{T} k\epsilon_k$.*

3.6.3 Kopovo kritérium eficiencie portfólia

K tomu aby sme mohli zaviesť Kopovo kritérium, potrebujeme miery rizika Value at Risk a Conditional Value at Risk. Predpokladajme, že X je náhodná veličina a $Y = -X$ označuje stratu z investície do aktíva X a má distribučnú funkciu F_Y.

Veta 3.18 ([15]) *Nech* $a_k = \frac{k}{T}, k = 0, 1, ..., T-1$. *Ďalej nech*

$$d^* = max_{\lambda_n} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n [CVaR_{a_k}(-\boldsymbol{r^T\tau}) - CVaR_{a_k}(-r_n)] \tag{3.10}$$

za podmienok:

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n [CVaR_{a_k}(-\boldsymbol{r^T\tau}) - CVaR_{a_k}(-r_n)] \geq 0, \quad k = 0, 1, ..., T-1.$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$$

Ak $d^* > 0$, *potom je portfólio* $\boldsymbol{\tau}$ *SSD neeficientné. Optimálne riešenie* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *úlohy je SSD eficientné portfólio a platí, že* $\boldsymbol{r^T\lambda} \succ_{SSD} \boldsymbol{r^T\tau}$.

Veta 3.19 ([15]) *Nech* $a_k = \frac{k}{T}, k = 0, 1, ..., T-1$. *Ďalej nech*

$$D^* = max_{D_k, \lambda_n, b_k} \sum_{k=0}^{T-1} D_k \tag{3.11}$$

za podmienok:

$$CVaR_{a_k}(-\boldsymbol{r^T\tau}) - b_k - \frac{1}{1-a_k} E(max[-\boldsymbol{r^T\lambda} - b_k]^+) \geq D_k, \quad k = 0, 1, ..., T-1,$$

$$D_k \geq 0, \quad k = 0, 1, ..., T-1.$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{X}$$

Ak $D^* > 0$, *potom je portfólio* $\boldsymbol{\tau}$ *SSD neeficientné. Optimálne riešenie* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *uvedenej úlohy je SSD eficientné portfólio a platí, že* $\boldsymbol{r^T\lambda} \succ_{SSD} \boldsymbol{r^T\tau}$. *V prípade, že* $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$, *je* $\boldsymbol{\tau}$ *SSD eficientné.*

Úlohu (3.11) je možné previesť aj na úlohu lineárneho programovania:

$$D^* = \max_{D_k,\lambda_n,b_k,w_k^t} \sum_{k=0}^{T-1} D_k \tag{3.12}$$

za podmienok:

$$CVaR_{\frac{k-1}{T}}(-\boldsymbol{r^T\tau}) - b_k - \frac{1}{(1-\frac{k-1}{T})T}\sum_{t=1}^{T} w_k^t \geq D_k, \quad k = 1, ..., T$$

$$w_k^t \geq -\boldsymbol{x^T\lambda} - b_k, \quad t, k = 1, ..., T$$

$$w_k^t \geq 0, \quad t, k = 1, ..., T$$

$$D_k \geq 0, \quad k = 1, ..., T.$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$$

3.7 Algoritmy stochastickej dominacie pre absolútne spojité rozdelenia

3.7.1 Normálne rozdelenie

Predpokladajme, že náhodná veličina X má normálne rozdelenie ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Potom má táto náhodná veličina hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.13}$$

Pre potreby tejto kapitoly uveďme základné vlastnosti normálneho rozdelenia, ktorých odvodenie je možné nájsť v práci [18]:

1. Pre náhodnú veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí $EX = \mu$ a $varX = \sigma^2$.

2. Dve distribučné funkcie (F_1 a F_2) normálne rozdelených náhodných veličín (X_1 a X_2) sa pretnú najviac jeden krát. V prípade, že $\sigma_1 = \sigma_2$, tak sa distribučné funkcie nikdy nepretnú a ak $\sigma_1 \neq \sigma_2$ pretnú sa práve raz.

3. Ak $\sigma_2 > \sigma_1$, potom má hustota f_2 ťažšie chvosty ako hustota f_1, z čoho plynie, že distribučné funkcie F_1 a F_2 sa pretnú presne jeden krát a to tak, že F_1 pretne F_2 zdola.

Veta 3.20 ([18]) *Nech* X_F *a* X_G *sú normálne rozdelené náhodné veličiny* $X_F \sim N(\mu_F, \sigma_F^2)$ *a* $X_G \sim N(\mu_G, \sigma_G^2)$.
Hovoríme, že $X_F \succ_{FSD} X_G$*, práve vtedy keď*

$$\mu_F > \mu_G \tag{3.14}$$

a zároveň

$$\sigma_F^2 = \sigma_G^2. \tag{3.15}$$

Dôkaz. V prípade, že $\sigma_F = \sigma_G$ distribučné funkcie náhodných veličín sa nepretnú. Pridaním podmienky $\mu_F > \mu_G$ zabezpečíme, že bude platiť $F_F < F_G$. Táto nerovnosť použitím viet o FSD implikuje, že $X_F \succ_{FSD} X_G$.
Naopak, ak $X_F \succ_{FSD} X_G$, tak sa distribučné funkcie F_F a F_G nesmú pretnúť. Z vlastností normálneho rozdelenia vieme, že to nastane len v prípade ak $\sigma_F = \sigma_G$ a keďže $X_F \succ_{FSD} X_G$, tak musí platiť $F_F < F_G$ a to nastáva len v prípade, keď $\mu_F > \mu_G$. ■

Veta 3.21 ([18]) *Nech* X_F *a* X_G *sú normálne rozdelené náhodné veličiny* $X_F \sim N(\mu_F, \sigma_F^2)$ *a* $X_G \sim N(\mu_G, \sigma_G^2)$.
Hovoríme, že $X_F \succ_{SSD} X_G$*, práve vtedy keď*

$$\mu_F \geq \mu_G \tag{3.16}$$

a zároveň

$$\sigma_F^2 \leq \sigma_G^2 \tag{3.17}$$

a aspoň jedna nerovnosť je splnená ako ostrá.

Dôkaz. je možné nájsť v práci [18]. ■

Poznámka Poznamenajme, že SSD za predpokladu normality je ekvivalentné Markowitzovmu kritériu.

Veta 3.22 ([22]) *Nech* X_F *a* X_G *sú náhodné veličiny, ktoré majú distribučné funkcie* F *a* G*. Hovoríme, že* $X_F \succ_{ISD} X_G$*, práve vtedy keď*

$$\min_{a \geq 0} E(e^{-aX_G} - e^{-aX_F}) \geq 0 \tag{3.18}$$

a zároveň

$$\max_{a \geq 0} E(e^{-aX_G} - e^{-aX_F}) > 0. \tag{3.19}$$

Dôkaz. je možné nájsť v páci [22]. ■

Poznámka Poznamenajme, že pre normálne rozdelenie je podmienka pre ISD dominanciu totožná s podmienkou SSD a NSD dominancie ($N = 1, ..., \infty$) a je ekvivalentná s Markowitzovým kritériom, ktoré je možné nájsť v práci [20].

V prípade, že predchádzajúcu vetu aplikujeme na normálne rozdelené náhodné veličiny, dostávame nasledujúce tvrdenie.

Veta 3.23 ([22]) *Nech X_F a X_G sú normálne rozdelené náhodné veličiny $X_F \sim N(\mu_F, \sigma_F^2)$ a $X_G \sim N(\mu_G, \sigma_G^2)$. Hovoríme, že $X_F \succ_{ISD} X_G$, práve vtedy keď*

$$\sigma_F^2 < \sigma_G^2 \wedge \mu_F \geq \mu_G \tag{3.20}$$

alebo

$$\sigma_F^2 = \sigma_G^2 \wedge \mu_F > \mu_G. \tag{3.21}$$

Dôkaz. je možné nájsť v páci [22]. ■

3.7.2 Lognormálne rozdelenie

Uvažujme náhodnú veličinu X. Zaveďme náhodnú veličinu Y vzťahom $Y = ln(X)$ a predpokladajme, že Y má normálne rozdelenie $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $E(ln(X)) = \mu$ a $var(ln(X)) = \sigma^2$.
Za platnosti týchto predpokladov má náhodná veličina X lognormálne rozdelenie $X \sim \wedge(\mu, \sigma^2)$, kde $\wedge$ značí lognormálne rozdelenie.
Je dôležité si povšimnúť, že obe rozdelenia (normálne aj lognormálne) sú charakterizované rovnakými parametrami μ a σ^2.
Hustota lognormálnej náhodnej veličiny X je daná nasledovne:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0 \tag{3.22}$$

$$f(x) = 0, x \leq 0. \tag{3.23}$$

Prvé dva momenty lognormálneho rozdelenia sú dané nasledovne:

$$E(x) = \exp^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \tag{3.24}$$

$$Var(x) = \exp^{2\mu+\sigma^2}[\exp^{\sigma^2} - 1]. \tag{3.25}$$

Kvantil lognormálneho rozdelenia je definovaný ako:

$$Q_{\wedge}(p) = \exp^{\mu + Q_Z(p)\sigma} \tag{3.26}$$

kde $Q_Z(p)$ je kvantil štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Uveďne ešte niekoľko základných vzťahov pre lognormálne rozdelenie:

1. Dve distribučné funkcie (F_1 a F_2) lognormálne rozdelených náhodných veličín (X_1 a X_2) sa pretnú najviac jeden krát. V prípade, že $\sigma_1 = \sigma_2$, tak sa distribučné funkcie nikdy nepretnú a ak $\sigma_1 \neq \sigma_2$ pretnú sa práve raz.

2. Ak $\sigma_2 > \sigma_1$, tak sa distribučné funkcie F_1 a F_2 sa pretnú presne jeden krát a to tak, že F_1 pretne F_2 zdola.

Čo sa týka praktického využitia, lognormálne rozdelenie v porovnaní s normálnym rozdelením má lepšie ekomonické využitie. Napríklad ceny akcií nemôžu byť negatívne, kdežto normálne rozdelenie (na rozdiel od lognormálneho) je definované aj pre záporné čísla, čo by mohlo implikovať, že ceny môžu byť aj záporné. Ďalším dôležitým argumentom je, že lognormálne rozdelenie je zošikmené (na rozdiel od normálneho rozdelenia, ktoré je symetrické) a túto vlastnosť majú vo všeobecnosti aj výnosy.

Veta 3.24 ([18]) *Nech X_F a X_G sú lognormálne rozdelené náhodné veličiny $X_F \sim \wedge(\mu_F, {\sigma^2}_F)$ a $X_G \sim \wedge(\mu_G, {\sigma^2}_G)$.*
Hovoríme, že $X_F \succ_{FSD} X_G$, práve vtedy keď

$$\mu_F > \mu_G \tag{3.27}$$

a zároveň

$$\sigma_F = \sigma_G. \tag{3.28}$$

Dôkaz. je analogický dôkazu pre normálne rozdelenie, preto ho neuvádzame, ale je možné ho nájsť v práci [18]. ■

Veta 3.25 ([18]) *Nech X_F a X_G sú lognormálne rozdelené náhodné veličiny $X_F \sim \wedge(\mu_F, {\sigma^2}_F)$ a $X_G \sim \wedge(\mu_G, {\sigma^2}_G)$.*
Hovoríme, že $X_F \succ_{SSD} X_G$, práve vtedy keď

$$E_F(x) \geq E_G(x) \tag{3.29}$$

a zároveň

$$C_F(x) = \frac{\sigma_F(x)}{E_F(x)} \leq \frac{\sigma_G(x)}{E_G(x)} = C_G(x). \tag{3.30}$$

a existuje aspoň jedno x_0, pre ktoré platí ostrá nerovnosť.

Dôkaz. je možné nájsť v práci [18]. ■

3.7.3 Exponenciálne rozdelenie

Predpokladajme, že náhodná veličina X má exponenciálne rozdelenie ($X \sim Exp(\lambda)$). Potom má náhodná veličina hustotu

$$f(x) = \lambda \exp^{-\lambda x}, x \geq 0. \tag{3.31}$$

Pre náhodnú veličinu $X \sim Exp(\lambda)$ platí $EX = \frac{1}{\lambda}$ a $varX = \frac{1}{\lambda^2}$.

Veta 3.26 *Nech X_F a X_G sú exponenciálne rozdelené náhodné veličiny $X_F \sim Exp(\lambda_F)$ a $X_G \sim Exp(\lambda_G)$. Platí, že $X_F \succ_{FSD} X_G$, práve vtedy keď platí $\lambda_F < \lambda_G$.*

Dôkaz. Distribučná funkcia exponencálne rozdelenej náhodnej veličiny X_F (a analogicky aj náhodnej veličiny X_G) má distribučnú funkciu definovanú vzťahom:

$$F(x) = 1 - \lambda \exp^{-\lambda x}, x \geq 0. \tag{3.32}$$

Dve distribučné funkcie exponenciálne rozdelených náhodných veličín X_F a X_G sa nikdy nepretnú (pre $\lambda_F \neq \lambda_G$).
Ako už vieme z predchádzajúcej kapitoly, platnosť $F(x) \leq G(x)$ a existencia aspoň jednej hodnoty x_0, pre ktorú platí $F(x_0) + a \leq G(x_0)$, kde a je kladná konštanta, je nutnou a postačujúcou podmienkou pre dominanciu FSD ($X_F \succ_{FSD} X_G$).
Na základe nerovnosti $\lambda_F \exp^{-\lambda_F x} \geq \lambda_G \exp^{-\lambda_G x}$ vidíme, že táto podmienka pre dominanciu FSD je splnená pre $\lambda_F < \lambda_G$, pretože $h(\lambda) = \lambda \exp^{-\lambda x}$ je klesajúca funkcia pre všetky $x \geq 0$ a potom $X_F \succ_{FSD} X_G$.
Naopak ak $X_F \succ_{FSD} X_G$, tak sa distribučné funkcie F_F a F_G nesmú pretnúť. Z vlastností exponenciálneho rozdelenia vieme, že sa distribučné funkcie nikdy nepretnú a keďže $X_F \succ_{FSD} X_G$, tak musí platiť $F_F < F_G$. Nerovnosť je splnená len v prípade, keď $\lambda_F < \lambda_G$. ■

Veta 3.27 *Nech X_F a X_G sú exponenciálne rozdelené náhodné veličiny $X_F \sim Exp(\lambda_F)$ a $X_G \sim Exp(\lambda_G)$. Potom $X_F \succ_{SSD} X_G$, práve vtedy keď platí $\lambda_F < \lambda_G$.*

Dôkaz. Ak je splnená podmienka $\lambda_F < \lambda_G$, tak z predchádzajúcej vety plynie, že $X_F \succ_{FSD} X_G$. Dominancia FSD implikuje dominanciu SSD, preto z platnosti podmienky $\lambda_F < \lambda_G$ plynie $X_F \succ_{SSD} X_G$.
Naopak ak $X_F \succ_{SSD} X_G$, tak musí byť splnená postačujúca podmienka SSD dominancie $\int_0^x [G(t) - F(t)]dt = \int_0^x [\lambda_G \exp^{-\lambda_G t} - \lambda_F \exp^{-\lambda_F t}]dt = [-\exp^{-\lambda_G t} + \exp^{-\lambda_F t}]_0^x = -\exp^{-\lambda_G x} + \exp^{-\lambda_F x} \geq 0$ pre všetky x a aspoň pre jedno x_0 je splnená ostrá nerovnosť. Táto podmienka môže byť však splnená len v prípade, keď $\lambda_F < \lambda_G$, pretože funkcia $\exp^{-\lambda x}$ je klesajúca funkcia pre všetky $x \geq 0$. ■

3.7.4 Gamma rozdelenie

Uvažujme náhodnú veličinu X s gamma rozdelením $X \sim \Gamma(k, \theta)$. Hustota náhodnej veličiny má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\theta^k \gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0 \tag{3.33}$$

kde $\gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ značí gamma funkciu. Pre náhodnú veličinu s gamma rozdelením platí $EX = k\theta$ a $Var(X) = k\theta^2$.

Veta 3.28 ([1]) *Nech $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ a $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$. Potom $X_1 \succ_{FSD} X_2$, práve vtedy keď $\theta_1 \geq \theta_2$ a zároveň $k_1 \geq k_2$ a aspoň jedna nerovnosť je splnená ako ostrá.*

Dôkaz. je možné nájsť v práci [1]. ■

Veta 3.29 ([2]) *Nech $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ a $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$. Potom $X_1 \succ_{SSD} X_2$, práve vtedy keď $\frac{k_1}{k_2} \geq max(1, \frac{\theta_2}{\theta_1})$, a ďalej je nutné, aby nerovnosť bola splňená ako ostrá aspoň v prípade, keď $\frac{\theta_2}{\theta_1} = 1$.*

Dôkaz. je možné nájsť v práci [2]. ■

Veta 3.30 ([22]) *Nech $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ a $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$. Potom $X_1 \succ_{ISD} X_2$, práve vtedy keď platí buď $k_1 > k_2 \wedge \theta_1 k_1 \geq \theta_2 k_2$ alebo $k_1 = k_2 \wedge \theta_1 > \theta_2$.*

Dôkaz. je možné nájsť v práci [22]. ■

Predchádzajúce tvrdenie sa nedá rozšíriť na kritérium pre porovnanie portfólií, pretože lineárna kombinácia náhodných veličín s gamma rozdelením nemusí mať gamma rozdelenie.

Kapitola 4

Optimalizácia portfólia so stochastickou dominanciou v obmedzeniach

4.1 Základné optimalizačné modely so stochastickou dominanciou v obmedzeniach

Predpokladajme konečný počet aktív, ktorých výnosy sú vyjadrené náhodným vektorom s diskrétnym rozdelením. Budeme sa zaoberať modelmi optimalizácie portfólia, ktoré zahrňujú stochastickú dominanciu v obmedzeniach. Tieto modely vyžadujú referenčnú investíciu (resp. portfólio, akciu, index,...), ktorá má známe rozdelenie výnosu. Naším cieľom bude vybrať také portfólio, aby jeho náhodný výnos dominoval výnos referenčného portfólia v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu a zároveň aby maximalizoval nejaké kritérium (napr. očakávaný výnos). Začneme modelom, ktorý pochádza z práce [3] a budeme pokračovať vlastnými formuláciami.

Model 1a

$$\begin{aligned} \max E[R(\boldsymbol{\lambda})] \\ \text{za podmienok:} \\ R(\boldsymbol{\lambda}) \succeq_{SSD} Y \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $R(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{r^T} \boldsymbol{\lambda}$ je náhodnný výnos prislúchajúci portfóliu s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ a náhodnými výnosmi aktív $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, ..., r_N)$, Y je náhodný výnos referenčného portfólia (resp. aktíva, indexu,...), a akcie tvoriace portfólio majú váhy $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)^T$, pre ktoré platí $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ a $\lambda_j \geq 0, j = 1, ..., N$.

Cieľom Modelu 1a je maximalizovať strednú hodnotu výnosu portfólia, za podmienky, že bude splnená podmienka SSD dominancie $R(\boldsymbol{\lambda}) \succeq_{SSD} Y$. Predpokladajme, že výnosy $\mathbf{r}$ majú združené diskrétne rozdelenie nadobúdajúce hodnoty r_{jt} pre $j = 1, ..., N$ a $t = 1, ..., T$ s pravdepodobnosťami p_t pre $t = 1, ..., T$ a že náhodný výnos referenčného portfólia Y má diskrétne rozdelenie s hodnotami y_t pre $t = 1, ..., T$. V nasledujúcej vete budeme pracovať s funkciou $LPM_Y(y_t) = E[(y_t - Y)_+]$, ktorú budeme nazývať Lower Partial moments (LPM).

Veta 4.1 ([3]) *Podmienka* $\boldsymbol{r^T\lambda} \succeq_{SSD} Y$ *z formulácie modelu (4.1) je ekvivalentná podmienke* $E[(y_t - Y)_+] \geq E[(y_t - \boldsymbol{r^T\lambda})_+], t = 1, ..., T$.

Dôkaz. je možné nájsť v práci [3]. ■

Použitím vety sa dostávame k "medziformulácii", v ktorej je podminenka na stochastickú dominanciu druhého rádu vyjadrená pomocou rozdielu $E[(y_t - Y)_+] - E[(y_t - \boldsymbol{r^T\lambda})_+]$.

Model 1b

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} E[\boldsymbol{r^T\lambda}] \tag{4.2}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$E[(y_t - Y)_+] - E[(y_t - \boldsymbol{r^T\lambda})_+] \geq 0, \quad t = 1, ..., T$$

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, ..., N$$

Teraz prevedieme formuláciu (4.2) na úlohu lineárneho programovania:

Model 1c

$$\max E(\boldsymbol{r^T\lambda}) \tag{4.3}$$
$$\text{za podmienok:}$$
$$\sum\nolimits_{i=1}^{T} \max(0, y_t - y_i)p_i - \sum\nolimits_{i=1}^{T} s_{it}p_i \geq 0, \quad t = 1, .., T$$
$$y_t - \sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji} \leq s_{it}, \quad i, t = 1, ..., T$$
$$s_{it} \geq 0, \quad i, t = 1, ..., T$$
$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Premenná s_{it} vo formulácii (4.3) nahrádza rozdiel medzi y_t a $R(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{r^T\lambda}$ v čase t, kde $i = 1, ..., N$ a $t = 1, ..., T$ (ak je tento rozdiel kladný).

Model 2a

$$\max_{t,\boldsymbol{\lambda}} E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \tag{4.4}$$
$$\text{za podmienok:}$$
$$E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \geq 0, \quad t = 1, ..., T$$
$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Model je vhodný pre použitie v prípade, keď hľadáme portfólio, ktoré má dominovať referenčné aktívum, avšak očakávame, že rozdiely vo výnosoch získaného portfólia a benchmarku budú nepatrné a preto sa zameriavame na hľadanie najväčšieho z týchto rozdielov. Podmienky

$$E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \geq 0, t = 1, ..., T$$

zabezpečujú, že získané riešenie bude dominovať referenčné aktívum. Existenciu prípustného riešenia zabezpečíme pridaním benchmarku do množiny uvažovaných aktív. Úlohu (4.4) ešte postupne preformulujeme na úlohu lineárneho programovania. Začneme prepisom úlohy pre diskrétne rozdelenie.

Model 2b

$$\max_{t,\boldsymbol{\lambda}} \sum_{i=1}^{T} \max(0, y_t - y_i)p_i - \sum_{i=1}^{T} s_{it}p_i \tag{4.5}$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{T} [\max(0, y_t - y_i)]p_i - \sum_{i=1}^{T} s_{it}p_i \geq 0, \quad t = 1, .., T$$

$$y_t - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji} \leq s_{it}, \quad i, t = 1, ..., T$$

$$s_{it} \geq 0, \quad i, t = 1, ..., T$$

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Úlohu prevedieme na úlohu lineárneho programovania zavedením pomocných premenných $D_t, t = 1, ..., T$, ktorými odmedzíme účelovú funkciu formulácie (4.4) a zároveň maximalizujeme súčet $\sum_{t=1}^{T} I_t D_t$. Pre index t, pre ktorý je rozdiel $E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \geq D_t$ najväčší, je optimálne I_t rovné jednej. Týmto postupom získavame úlohu (4.6):

Model 2c

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{t=1}^{T} I_t D_t \tag{4.6}$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{T} [\max(0, y_t - y_i)]p_i - \sum_{i=1}^{T} s_{it}p_i \geq D_t, \quad t = 1, .., T$$

$$D_t \geq 0 \quad t = 1, ..., T$$

$$y_t - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji} \leq s_{it}, \quad i, t = 1, ..., T$$

$$s_{it} \geq 0, \quad i, t = 1, ..., T$$

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

$$\sum_{t=1}^{T} I_t = 1$$

$$I_t \geq 0, \quad t = 1, ..., T$$

Model 3a

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{t=1}^{T} ((E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+))\tau_t \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&\text{za podmienok:} \\
E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \geq 0, &\quad t = 1, ..., T \\
\textstyle\sum_{j=1}^{N} \lambda_j &= 1 \\
\lambda_j \geq 0, &\quad j = 1, ..., N
\end{aligned}$$

Cieľom úlohy (4.7) je nájsť portfólio, ktoré bude dominovať referenčné aktívum a popritom si chceme ponechať možnosť priložiť pozorovaniam rôznu dôležitosť. Túto funkciu vo formulácii tejto úlohy má parameter $\tau_t, t = 1, ..., T$. V prípade, že by sme sa rozhodli priložiť starším pozorovaniam menšiu dôležitosť, táto formulácia by mohla byť vhodná pre investora, pre ktorého je viac smerodatná cena akcií súčasnosti a cena v minulosti ho až tak nezaujíma (napríklad z dôvodu, že bola v tomto období vplyvom krízy skreslená cena akcií), ale predsalen ju nechce zanedbať preto jej prikladá nižšiu váhu. Nezápornosť účelovej funkcie znova zabezpečíme pridaním benchmarku do množiny uvažovaných aktív. Úlohu (4.7) ešte preformulujeme na úlohu lineárneho programovania.

Model 3b

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \textstyle\sum_{t=1}^{T} (\sum_{i=1}^{T} \max(0, y_t - y_i) p_i - \sum_{i=1}^{T} s_{it} p_i) \tau_t \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
&\text{za podmienok:} \\
\textstyle\sum_{i=1}^{T} [\max(0, y_t - y_i)] p_i - \sum_{i=1}^{T} s_{it} p_i \geq 0, &\quad t = 1, .., T \\
y_t - \textstyle\sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji} \leq s_{it}, &\quad i, t = 1, ..., T \\
s_{it} \geq 0, &\quad i, t = 1, ..., T \\
\textstyle\sum_{j=1}^{N} \lambda_j &= 1 \\
\lambda_j \geq 0, &\quad j = 1, ..., N
\end{aligned}$$

Model 3c

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \sum\nolimits_{t=1}^{T} (\sum\nolimits_{i=1}^{T} max(0, y_t - y_i)p_i - \sum\nolimits_{i=1}^{T} s_{it}p_i) \tag{4.9}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{T} [max(0, y_t - y_i)]p_i - \frac{1}{T}\sum\nolimits_{i=1}^{T} s_{it}p_i \geq 0, \quad t = 1, .., T$$

$$y_t - \sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji} \leq s_{it}, \quad i, t = 1, ..., T$$

$$s_{it} \geq 0, \quad i, t = 1, ..., T$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Model (4.9) je špeciálnym prípadom modelu (4.8) pre konštantné váhy $\tau_t = 1, t = 1, .., T$. Účelová funkcia tejto formulácie modelu reprezentuje aproximáciu plochy rozdielu distribučných funkcií $E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+)$.Cieľom úlohy je nájsť dominujúce portfólio, tak aby dominancia bola globálne čo "najvýznamnejšia".

Model 4a

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} E([y_T - Y]_+) - E([y_T - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \tag{4.10}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \geq \epsilon_t, \quad t = 1, ..., T-1$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Táto formulácia predpokladá, že do dát s ktorými sa pracuje môžu byť zanesené zaokrúhľovacie chyby a investor by chcel počítať aj s prítomnosťou zatiaľ neznámych transakčných nákladov, preto si v podmienkach na stochastickú dominanciu $E([y_t - Y]_+) - E([y_t - R(\boldsymbol{\lambda})]_+) \geq \epsilon_t$ zvolí kladné parametre ϵ_t, ktoré sú nepatrne väčšie ako 0, aby sa vplyvom zaokrúhľovacích chýb a odčítaním transakčných nákladov získaná dominancia nezrušila. Úloha sa zameriava na minimalizáciu $LPM_{R(\boldsymbol{\lambda})}(y_T)$ iba pre posledné (tj.najnovšie) pozorovanie, preto sa dá očakávať, že optimálne portfólio bude zložené z aktív, ktoré majú v dobe výpočtu (predpokladáme, že je identická ako posledné pozorovanie) najvyšší rozdiel výnosu od referenčného aktíva a zároveň splňujú podmienky na dominanciu pre všetky scénáre. Úlohu (4.10) ešte preformulujeme na úlohu lineárneho programovania.

Model 4b

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\lambda}} \sum\nolimits_{i=1}^{T} max(0, y_T - y_i)p_i - \sum\nolimits_{i=1}^{T} s_{iT}p_i \\
\text{za podmienok:} \\
\sum\nolimits_{i=1}^{T}[max(0, y_t - y_i)]p_i - \sum\nolimits_{i=1}^{T} s_{it}p_i \geq \epsilon_t, \quad t = 1, .., T-1 \\
y_t - \sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji} \leq s_{it}, \quad i, t = 1, ..., T \\
s_{it} \geq 0, \quad i, t = 1, ..., T \\
\sum\nolimits_{j=1}^{N} \lambda_j = 1 \\
\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

4.2 SD modely formulované pomocou CVaRu

Ako sme už v predchádzajúcej kapitole spomenuli, je možné podmienku pre stochastickú dominanciu druhého rádu formulovať aj pomocov $CVaR$-u. Túto skutočnosť využívame pri formulácii ďalších modelov. Nech náhodná veličina Z reprezentuje stratu referenčného aktíva a $Q(\boldsymbol{\lambda})$ reprezentuje stratu portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$. Potom má základná formulácia optimalizačnej úlohy pomocou CVaR-ov nasledujúci tvar:

Model 5a

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\lambda}} \min_{\alpha} CVaR_\alpha(Z) - CVaR_\alpha(Q(\boldsymbol{\lambda})) \\
\text{za podmienok:} \\
\alpha \in [0, 1) \\
\sum\nolimits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \\
\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., N
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

4.2.1 Diskrétne rozdelenie

Nech Y je diskrétna náhodná veličina, ktorá reprezentuje výnos aktíva. Označme náhodnú veličinu $Z = -Y$ stratou spomínaného aktíva a predpokladajme, že má konečnú strednú hodnotu a predpokladajme že realizácie náhodnej veličiny sú rovnako pravdepodobné. Ďalej označme $Q(\boldsymbol{\lambda})$ stratu portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$. Úloha (4.12) využíva podmienku na stochastickú dominanciu vyjadrenú pomocou CVaR-ov, ktorú sme zaviedli v predchádzajúcej kapitole. Úloha je postavená tak, aby maximalizovala minimálny rozdiel medzi CVaR-mi. Označme $\Gamma = \{0, \frac{1}{T}, ..., \frac{T-1}{T}\}$.

Model 5b

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \min_{\alpha \in \Gamma} CVaR_\alpha(Z) - CVaR_\alpha(Q(\boldsymbol{\lambda})) \tag{4.13}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., N$$

$CVaR_\alpha(Z)$ aj $CVaR_\alpha(Q(\lambda))$ ako funkcie α sú monotónne a po častiach lineárne s bodmi zlomu $\alpha = \frac{k}{T}, k = 0..., T-1$. Preto stačí uvažovať $\alpha \in \Gamma$. Podobne ako pre Model 2a potrebujeme túto "max min" úlohu previesť na úlohu lineárneho programovania. Dosiahneme to zavedením pomocnej premennej D, ktorú budeme následne maximalizovať vzhľadom k vzniknutým obmedzeniam.

Úlohu (4.13) môžeme prepísať nasledovným spôsobom:

Model 5c

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} D \tag{4.14}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$CVaR_\alpha(Z) - CVaR_\alpha(Q(\boldsymbol{\lambda})) \geq D, \quad \alpha = 0, \frac{1}{T}, ..., \frac{T-1}{T}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., N$$

V poslednom kroku ešte model (4.14) prepíšeme na nasledujúci tvar:

Model 5d

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} D \tag{4.15}$$
$$\text{za podmienok:}$$
$$CVaR_{\frac{k-1}{T}}(Z) - b_k - \frac{1}{T+1-k}\sum_{t=1}^{T} w_k^t \geq D, \quad k = 1, ..., T$$
$$w_k^t \geq -\boldsymbol{r^T\lambda} - b_k, \quad k, t = 1, ..., T$$
$$w_k^t \geq 0, \quad k, t = 1, ..., T$$
$$\sum\nolimits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., N$$

Model (4.15) je už úlohou lineárneho programovania.

4.2.2 Normálne rozdelenie

Združené rozdelenie normálne rozdelených náhodných veličín (v našom prípade je to vektor výnosov jednotlivých aktív) je viacrozmerné normálne $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Takže celé portfólio s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ má jednorozmerné normálne rozdelenie $N(\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda})$, kde $\boldsymbol{\Sigma}$ značí variančnú maticu. Uvažujme náhodnú veličinu Y s normálnym rozdelením $N(\mu, \Sigma)$ reprezentujúcu výnos aktíva.

Náhodná strata $Z = -Y$ má za predpokladu $N(0,1)$ rozdelenia $CVaR$ daný nasledujúcou rovnosťou [12]:

$$CVaR_\alpha(Z) = E[Z/Z > VaR_\alpha(Z)] =$$
$$= \frac{1}{P[Z > \Phi^{-1}(\alpha)]}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{z \exp -\frac{z^2}{2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \frac{\exp(\frac{-(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2})}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \tag{4.16}$$

kde $\Phi(x)$ značí distribučnú funkciu normálneho rozdelenia $N(0,1)$. Potom má náhodná strata aktíva Z normálne rozdelenie $N(-\mu, \Sigma)$.

S využitím $N(0,1)$ rozdelenia výnosov Y má strata portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ rozdelenie $N(\boldsymbol{-\lambda^T\mu}, \boldsymbol{\lambda^T\Sigma\lambda})$ a túto stratu vyjadríme nasledovne:

$$Z = \boldsymbol{-\lambda^T\mu} + \sqrt{\boldsymbol{\lambda^T\Sigma\lambda}}Y. \tag{4.17}$$

Z rovností (4.16) a (4.17) a koherencie CVaR-u plynie nasledujúci vzťah pre CVaR straty:

$$CVaR_\alpha(Z) = -\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \frac{\exp(\frac{-(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2})}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda^T\Sigma\lambda}} \tag{4.18}$$

Využitím odvodených znalostí môžeme preformulovať základný model pre normálne rozdelenie. Predpokladajme, že strata referenčného portfólia je reprezentovaná náhodnou veličinou Z s rozdelením $N(\mu_Z, \Sigma_Z)$ a strata portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ má rozdelenie $N(-\boldsymbol{\lambda^T\mu}, \boldsymbol{\lambda^T\Sigma\lambda})$. Potom má optimalizačná úloha nasledovný tvar:

Model 6a

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\min_{\alpha}[\mu_Z + \frac{\exp(\frac{-(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2})}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\Sigma_Z} - (-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{\exp(\frac{-(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2})}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma\lambda}})] \tag{4.19}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$\alpha \in [0,1]$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Úvahami zameranými na chovanie účelovej funkcie ako funkcie premennej α (tj. pre fixné $\boldsymbol{\lambda}$) sme našli minimum tejto funkcie a tým získlali zjednodušený zápis úlohy:

Model 6b

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \mu_Z + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu} \tag{4.20}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$\sqrt{\Sigma_Z} > \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma\lambda}}$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Použili sme, že výraz $\frac{\exp(\frac{-(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2})}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}$, ktorý je funkciou premennej α nadobúda v bode 0 minima (a je rovné 0), pretože uvedená funkcia je nezáporná a 0 nadobúda len pre $\alpha = 0$. Taktiež sme pridali podmienku, ktorá vyžaduje aby smertodatná odchýlka výnosov portfólia bola menšia ako smerodatná odchýlka referenčného aktíva.

4.2.3 Študentovo rozdelenie

Keďže sme zatiaľ v práci nepracovali so Študentovým rozdelením, pripomenieme jeho definíciu.

Definícia 4.1 ([12]) *Hovoríme, že vektor* $\boldsymbol{Y}=(Y_1,...,Y_N)^T$ *má Študentovo rozdelenie s* n *stupňami voľnosti, s vektorom stredných hodnôt* $\boldsymbol{\mu}$ *a korelačnou maticou* $\boldsymbol{R}$ *(s prislúchajúcou kovariančnou maticou* $\boldsymbol{\Sigma}$*) ak má hustotu*

$$f(y) = \frac{\gamma(\frac{n+N}{2})}{(n\pi)^{\frac{N}{2}}\gamma(\frac{n}{2})R^{\frac{1}{2}}}[1 + \frac{1}{n}(y - \boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{R}^{-1}(y - \boldsymbol{\mu})]^{-\frac{n+N}{2}} \tag{4.21}$$

kde $\gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ *značí gamma funkciu.*

Predpokladajme, že združené rozdelenie výnosov jednotlivých aktív je viacrozmerné Študentovo rozdelenie s parametrami $\boldsymbol{\mu}$, n a $\boldsymbol{\Sigma}$. Potom výnos portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ má jednorozmerné Študentovo rozdelenie s parametrami $\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu}$, n a $\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}$.

Náhodná veličina Z= -Y so Študentovým rozdelením reprezentujúca stratu portfólia má daný $CVaR_\alpha$ nasledujúcou rovnosťou [12]:

$$CVaR_\alpha(Z) = -\boldsymbol{\lambda^T}\boldsymbol{\mu} + \frac{\gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{n}(1 + \frac{t^2_{\alpha,n}}{n})^{-\frac{n-1}{2}}}{\gamma(\frac{n-2}{2})(1-\alpha)(n-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda^T}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}} \tag{4.22}$$

kde $t^2_{\alpha,n}$ značí α-kvantil jednorozmerného Študentovho rozdelenia s n stupňami voľnosti.

Predpokladáme, že strata referenčného portfólia je reprezentovaná náhodnou veličinou Z so Študentovým rozdelením s parametrami μ_Z, n a Σ_Z a výnos portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ má Študentovo rozdelenie s parametrami $\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu}$, n a $\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}$. Potom má optimalizačná úloha pre Študentovo rozdelenie nasledujúci tvar:

Model 7a

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \min_{\alpha} [\mu_Z + \frac{\gamma(\frac{n-1}{2}\sqrt{n}(1+\frac{t_{\alpha,n}^2}{n})^{-\frac{n-1}{2}}}{\gamma(\frac{n-2}{2})(1-\alpha)(n-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\Sigma_Z} \tag{4.23}$$
$$-(-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{\gamma(\frac{n-1}{2}\sqrt{n}(1+\frac{t_{\alpha,n}^2}{n})^{-\frac{n-1}{2}}}{\gamma(\frac{n-2}{2})(1-\alpha)(n-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}})]$$
$$\text{za podmienok:}$$
$$\alpha \in [0,1]$$
$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0, j = 1, ..., N$$

Podobnými úvahami ako v prípade normálneho rozdelenia sme zjednodušili optimalizačnú úlohu aj pre Študentovo rozdelenie. Pomocou úvah zameraných na chovanie účelovej funkcie ako funkcie premennej α (tj. pre fixné $\boldsymbol{\lambda}$) sme našli minimum tejto funkcie a tým získlali zjednodušený zápis úlohy (4.23):

Model 7b

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} [\mu_Z + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu}]$$
$$\text{za podmienok:}$$
$$\sqrt{\Sigma_Z} > \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}}$$
$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Tentokrát sme použili, že pre $\alpha \to 0+$ platí $(1+\frac{t_{\alpha,n}^2}{n})^{-\frac{n-1}{2}} \to 0$.

4.2.4 Eliptické rozdelenie

Doteraz sme sa zaoberali normálnym a Študentovým rozdelením, ktoré patria do triedy eliptických rozdelení, preto považujeme za prínosné zamerať sa aj na všeobecné eliptické rozdelenie a taktiež pomocou neho preformulovať optimalizačnú úlohu založenú na $CVaR$-e. Keďže sme v tejto práci ešte nepracovali so všeobecne eliptickými rozdeleniami, zavedieme najprv definíciu a základné tvrdenia potrebné pre odvodenie $CVaR$-u a následne sformulujeme optimalizačnú úlohu.

Definícia 4.2 ([12]) *Hovoríme, že vektor* $\boldsymbol{Y}$ *má mnohorozmerné eliptické rozdelenie* $E_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$*, ak sa jeho charakteristická funkcia dá vyjadriť v tvare:*

$$\varphi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t}) = e^{i\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}}\varphi(\frac{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}}{2}) \tag{4.24}$$

pre nejaký vektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$*, pozitívne definitnú maticu* $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *a funkciu* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Funkcia* φ *musí byť zvolená tak, aby funkcia* $\varphi_{\boldsymbol{Y}}$ *splňovala požiadavky charakteristickej funkcie.*

Veta 4.2 ([12]) *Nech má* $\boldsymbol{Y}$ *má mnohorozmerné eliptické rozdelenie* $E_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{s\times p}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^s$*. Potom platí*

$$A\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{b} \sim E_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T, \varphi). \tag{4.25}$$

Na základe tohto tvrdenia vieme, že ak má výnos aktív mnohorozmerné eliptické rozdelenie $E_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$, tak má portfólio s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ jednorozmerné eliptické rozdelenie $E_1(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}, \varphi)$.

Veta 4.3 ([12]) *Nech* $Y \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$ *a* $G(y)$ *je genrátor distribučnej funkcie,* $\alpha \in [0, 1]$*. Potom platí*

$$CVaR_\alpha(Y) = \mu + \zeta\sigma^2 \tag{4.26}$$

kde ζ *vyjadríme nasledovne:*

$$\zeta = \frac{\frac{1}{\sigma}\bar{G}(\frac{(\frac{q_\alpha-\mu}{\sigma})^2}{2})}{1-\alpha}. \tag{4.27}$$

Definíciu generátoru distribučnej funkcie $G(y)$ a bližší popis funkcie ζ je možné nájsť v práci [12].
Predpokladajme, že strata referenčného portfólia je reprezentovaná náhodnou veličinou Z s eliptickým rozdelením s parametrami $E1(\mu_Z, \Sigma_Z)$ a výnos portfólia s váhami $\boldsymbol{\lambda}$ má eliptické rozdelenie s parametrami $E_1(\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda})$. Použitím vzťahu z predchádzajúcej vety a vyriešením minimalizačnej úlohy podobne ako pre normálne a Študentovo rozdelenie dostávame formuláciu úlohy (4.12) pre eliptické rozdelenie.

Model 8a

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}[\mu_Z + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu}] \tag{4.28}$$

$$\text{za podmienok:}$$

$$\sqrt{\Sigma_Z} > \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{N}\lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., N$$

Kapitola 5

Praktická aplikácia

V praktickej aplikácii sa zameriame na hľadanie portfólií na českom akciovom trhu, ktoré dominujú index PX a sú optimálne vzhľadom k nejakým dodatočným kritériám. Z českých akcií sme vybrali nasledovné:

- AAA (nevypláca dividendy)
- CETV (nevypláca dividendy)
- ČEZ
- ERSTE GROUP BANK
- KOMERČNÍ BANKA
- NWR
- ORCO
- PEGAS NONWOVENS
- TELEFÓNICA C.R.
- UNIPETROL
- VIG

Spoločnosť AAA sa zaoberá predajom jazdených vozidiel a finančnými službami v automobilovej oblasti. Spoločnosť CETV vlastní a prevádzkuje komerčné televízne stanice. Spoločnosť ČEZ je výrobcom a predajcom elekrickej energie a taktiež prevádzkovateľom distribučnej sústavy. Spoločnosť ERSTE GROUP BANK sa zaoberá bankovníckymi službami. Spoločnosť KOMERČNÍ BANKA poskytuje komplexné služby v oblasti bankovníctva. Spoločnosť NWR sa zaoberá vyhľadávaním, ťažbou a predajom čierneho uhlia. Spoločnosť ORCO sa zaoberá získavaním nehnuteľností a poskytovaním pôžičiek. Spoločnosť PEGAS NONWOVENS je výrobcom netkaných textílií. Spoločnosť TELEFÓNICA C.R. je telekomunikačná spoločnosť. Spoločnosť UNIPETROL spracováva ropu a vyrába petrochemické produkty. Spoločnosť VIG poskytuje finančné služby (konkrétne sa zaoberá poisťovníctvom).

Mali sme k dispozícii denné ceny vybraných akcií a napočítali sme mesačné relatívne výnosy pomocou nasledujúceho vzťahu na výpočet

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}. \tag{5.1}$$

R_{t+1} značí relatívny výnos v čase $t+1$, P_{t+1} značí cenu akcie v čase $t+1$, P_t značí cenu akcie v čase t. Pre akcie vyplácajúce dividendu sme použili nasledujúci vzorec

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t + D_{t+1}}{P_t}. \tag{5.2}$$

kde D_{t+1} je dividenda vyplatená v čase $t+1$. V celej kapitole sme pracovali s relatívnymi výnosmi za obdobie od júla 2008 do decembra 2012 vyjadrenými v percentách.

5.1 Analýza a testovanie dát

Predtým ako sme sa pustili do riešenia optimalizačných úloh, zamerali sme sa na analýzu dát. Pre dáta uvádzame tabuľku so základnými štatistickými údajmi (maximálnu a minimálnu hodnotu, medián, priemer a smerodatnú odchýlku pre každú akciu). Keďže dáta môžu vykazovať známky časovej korelovanosti, považovali sme za potrebné časovú nekorelovanosť otestovať. Použili sme program TestRand Mgr.Tomáša Hanzáka, ktorý ponúka nasledujúce testy (v tabuľke ich značíme skratkami, ktoré sú uvedené v zátvorkách):

- Test založený na znamienkách diferencií (TZNZD)
- Test založený na bodoch zvratu (TZNBZ)

- Test založený na Kendallovom koeficiente (TZNKK)
- Test založený na Spearmanovom koeficiente (TZNSK)
- Mediánový test (MT)

Testy nekorelovanosti sme robili na hladine spoľahlivosti 95% a získané p-hodnoty uvádzame v tabuľkách. Nulovú hypotézu časovej nekorelovanosťi zamietame len pre niektoré akcie a nie všetky typy testov, preto tieto výsledky zanedbáme a budeme predpokladať časovú nekorelovanosť dát. Normálne rozdelenie sme testovali Shapiro-Wilcoxon testom normality a Jarque-Bera testom a Študentovo rozdelenie s rôznymi stupňami voľnosti testom Kologorov-Smirnov. Testy Študentovho a normálneho rozdelenia sme taktiež robili na hladine spoľahlivosti 95%. Z testov Študentovho rozdelenia s rôznymi stupňami voľnosti (n=3,4,..,10) sme obdržali pre všetky akcie p-hodnoty menšie ako $0,05$. V prípade normálneho rozdelenia uvádzame tabuľku s p-hodnotami.

Aktívum	Minimum	Maximum	Median	Priemer	Smer.odch.
AAA	-33.76	33.84	-0.13	1.20	12.32
CETV	-58.22	83.60	-1.99	-1.74	23.65
CEZ	-23.50	15.90	-0.89	-0.58	6.95
ERSTE	-40.73	53.50	1.78	0.60	15.94
KOMERČNÍ BANKA	-31.30	33.46	1.34	1.20	10.42
NWR	-52.58	45.50	-2.14	-0.89	18.16
ORCO	-55.60	69.96	-2.83	-2.41	21.29
PEGAS NONWOVENS	-31.19	39.76	0.95	1.69	9.59
TELEFONICA.C.R	-12.72	16.12	0.07	0.22	4.99
UNIPETROL	-23.41	32.11	-0.80	-0.23	9.34
VIG	-43.71	44.89	0.74	0.98	11.91
PX index	-27.04	21.61	-0.79	-0.28	8.23

Súhrnná tabuľka deskriptívnych štatistík výnosov od júla 2008 do decembra 2012

Aktívum	TZNZD	TZNBZ	TZNKK	TZNSK	MT
AAA	0,4835	0,3813	0,4422	0,4247	0,5826
CETV	0,4835	0,1255	0,8755	0,9900	0,9999
CEZ	0,8153	0,6616	0,6926	0,6341	0,5826
ERSTE GROUP BANK	0,8153	0,0286	0,5860	0,5300	0,1695
KOMERČNÍ BANKA	0,4835	0,5843	0,5163	0,6094	0,4098
NWR	0,8153	0,8268	0,9584	0,9480	0,5826
ORCO	0,8153	0,2287	0,8638	0,7243	0,7835
PEGAS NONWOVENS	0,8153	0,6616	0,9346	0,9728	0,5826
TELEFONICA.C.R	0,8153	0,5843	0,4247	0,4311	0,9999
UNIPETROL	0,0356	0,1255	0,1499	0,2060	0,5826
VIG	0,4835	0,9129	0,6384	0,6942	0,7835
PX index	0,4835	0,8268	0,6707	0,5772	0,2717

Výsledky testov časovej nekorelovanosti

Aktívum	Shapiro-Wilk normality test	Jarque Bera Test
AAA	0.0021	0.0411
CETV	0.0494	0.0007
CEZ	0.1183	0.1141
ERSTE	0.3189	0.4880
KOMERČNÍ BANKA	0.0043	0.0004
NWR	0.0964	0.1126
ORCO	0.0287	0.0021
PEGAS NONWOVENS	0.0000	0.0000
TELEFONICA.C.R	0.1759	0.1458
UNIPETROL	0.0018	0.0000
VIG	0.0000	0.0000
PX index	0.0163	0.0123

Test normality dát

5.2 Výsledky výpočtov - GAMS

Vo výpočetnej časti tejto práce sme sa zamerali na nasledujúce modely:

- Model 1c (4.3) - základná úloha so stochastickou dominanciou založená na maximalizácii strednej hodnoty výnosu portfólia.

- Model 2c (4.6) - úloha, ktorej cieľom je nájsť dominujúce portfólio za predpokladu malých rozdielov od referenčného aktíva sa zameriava na maximalizáciu rozdielov cez jednotlivé scénáre.

- Model 3b-1 (4.8) - cieľom úlohy je nájsť portfólio dominujúce referenčné aktívum, s tým že starším dátam prikladá menšiu dôležitosť. Scénáre sú pre túto úlohu zoradené od najstarších k najsúčasnejším a sú použité váhy $\tau_t = \frac{t}{T}, t = 1, ..., T$, kde T je počet pozorovaní.

- Model 3b-2 (4.8) - pre túto úlohu na rozdiel od predchádzajúcej zoradíme dáta od najnižšej výnosnosti referenčného aktíva po najvyššiu a zvolíme rovnaké váhy ako v predchádzajúcej úlohe $\tau_t = \frac{t}{T}, t = 1, ..., T$.

- Model 3c (4.9) - v tejto variante úlohy prikladáme všetkým pozorovaniam rovnakú dôležitosť, preto $\tau_t = 1, t = 1, ..., T$.

- Model 4b (4.11) - úloha sa zameriava na maximalizáciu LPM pre posledné pozorovanie a v podmienkach na stochastickú dominanciu sa zavádzajú kladné parametre nepatrne väčšie ako nula, aby sa vplyvom zaokrúhľovacích chýb a dodatočným zahrnutím transakčných nákladov nezrušila stochastická dominancia.

- Model 5d (4.15) - úloha využíva stochastickú dominanciu vyjadrenú pomocou CVAR-u. Je postavená, tak aby maximalizovala rozdiel medzi CVaR-mi referenčného aktíva a hľadaného portfólia pre diskrétne rozdelenie.

- Model 6b-7b-8a (4.20), (4.24), (4.28) - je modifikáciou predchádzajúcej úlohy pre normálne, Študentovo a eliptické rozdelenie.

Výsledky

Aktívum/Model	1c	2c	3b-1	3b-2	3c	4b	5d	6b-7b-8a
AAA	0.000	0.000	0.000	0.049	0.011	0.073	0.000	0.126
CETV	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
CEZ	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ERSTE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000
KB	0.206	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.125
NWR	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ORCO	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.006	0.000	0.000
PEGAS	0.688	0.523	0.378	0.467	0.393	0.605	0.304	0.697
TELEFONICA	0.106	0.345	0.537	0.431	0.532	0.213	0.651	0.000
UNIPETROL	0.000	0.107	0.085	0.053	0.064	0.105	0.045	0.052
VIG	0.000	0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
PX	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Str.hodn.	1.435	0.963	0.740	0.932	0.781	1.133	0.648	1.493
Rozptyl	64.874	39.984	28.699	35.537	29.871	48.673	26.031	67.735

Výsledky optimalizačných úloh

Model 1c sa zameriava na maximalizáciu strednej hodnoty výnosu, preto je optimálne portfólio zložené z aktív s najväčším priemerným výnosom, tj. KB, PEGAS a TELEFONICA. Optimálne portfólio má druhú najvyššiu strednú hodnotu výnosností a druhý najväčší rozptyl.

Model 2c hľadá scénár, pre ktorý je rozdiel medzi referenčným aktívom a hľadaným portfóliom najväčší (je to obdobie august 2008).

Ďalej je zaujímavý rozdiel medzi Modelmi 3b-1,3b-2,3c. Očakávali sme, že úloha 3b-1 bude mať podobné výsledky ako úloha 3c, pretože pre obe úlohy používame dáta zoradené podľa dátumu. Výsledky úloh potvrdzujú, že je medzi nimi len nepatrný rozdiel. Model 3b-2 bol formulovaný podobne ako Model 3b-1 avšak dáta sú zoradené vzostupne podľa výnosu referenčného aktíva, preto má optimálne riešenie vyššiu strednú hodnotu výnosu.

Model 4b, ktorý je založený na maximalizácii LPM pre posledné pozorovanie, má jednu z najvyšších stredných hodnôt výnosu a vysoké riziko. Skladá sa z aktív, ktoré mali s ohľadom na splnenie podmienok na stochastickú dominanciu najvyššie výnosy pre posledné pozorovanie (december 2012).

Najnižšiu strednú hodnotu výnosu má Model 5d a taktiež má aj najnižšie riziko, preto je riešenie tejto úlohy vhodné pre rizikovo averzného investora. Keď porovnáme Model 6b-7b-8a (ktorý predpokladá konkrétne absolútne spojité rozdelenie) a Model 5d (ktorý je formulovaný pre diskrétne rozdelenie), všimneme si že výsledky úloh sa značne líšia. Domnievame sa, že tento rozdiel je spôsobený tým, že sme si zámerne dovolili zanedbať výsledky testov absolútne spojitých rozdelení a aj napriek tomu, že predpoklady úlohy 6b-7b-8a neboli splnené, sme úlohy riešili s cieľom porovnať výsledky úloh pri nesplnených predpokladoch. Optimálne portfólio Model-u 6b-7b-8a má najväčšiu strednú hodnotu výnosu optimálneho portfólia a zároveň aj najväčší rozptyl, takže investor voľbou tohto portfólia uprednostňuje vysoký výnos aj za prítomnosti značného rizika. Z výsledkov nášho "experimentu" plynie, že zanedbaním nesplnených predpokladov na rozdelenie výnosov dochádza k značnému nadhodnoteniu strednej hodnoty výnosov a taktiež aj k nadhodnoteniu rizika.

Výsledky s bezrizikovým aktívom

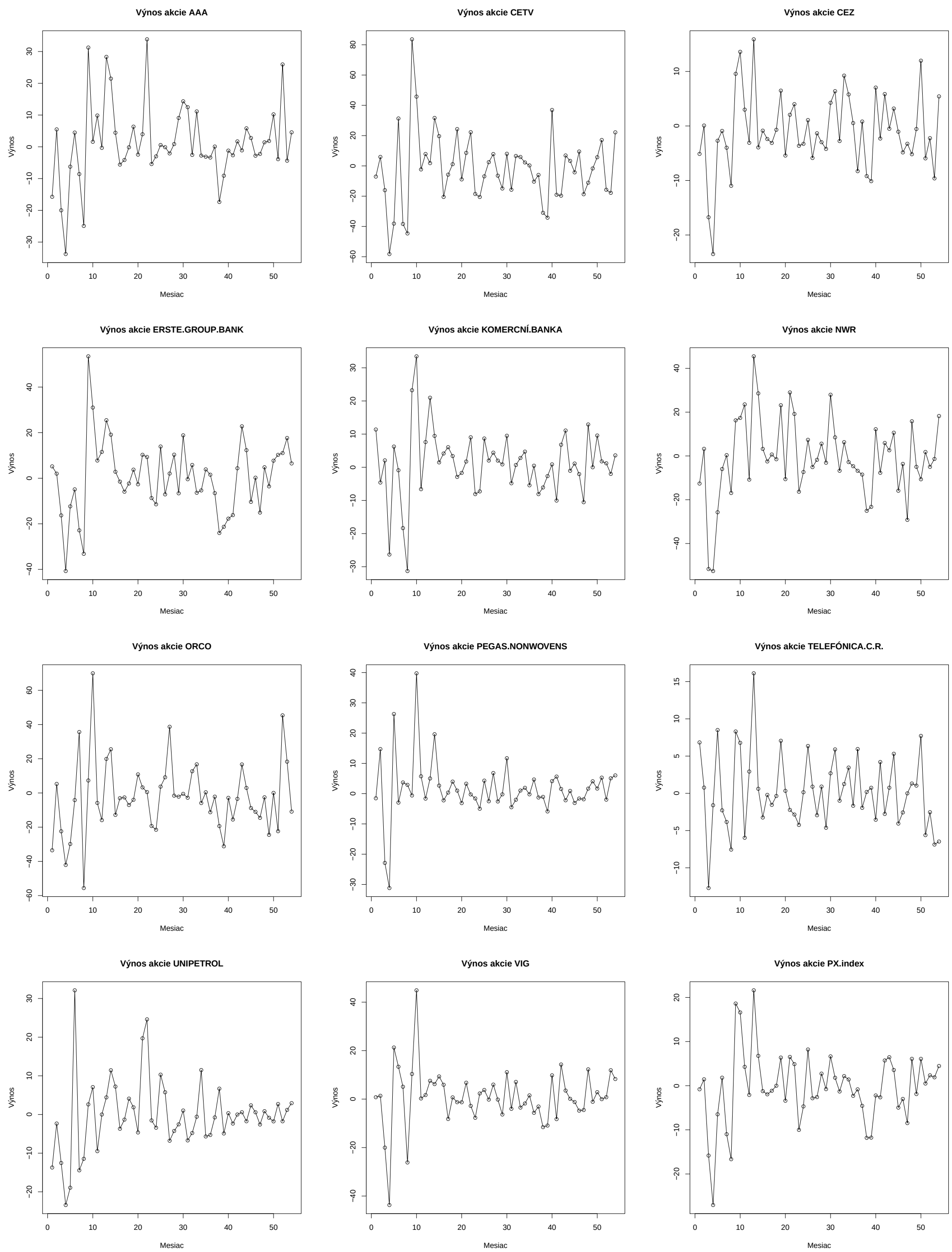
Aktívum/Model	1c	2c	3b-1	3b-2	3c	4b	5d	6b-7b-8a
AAA	0.000	0.039	0.013	0.049	0.005	0.116	0.000	0.110
CETV	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
CEZ	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ERSTE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
KB	0.149	0.000	0.031	0.006	0.036	0.002	0.000	0.087
NWR	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ORCO	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
PEGAS	0.742	0.058	0.114	0.167	0.119	0.197	0.000	0.747
TELEFONICA	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000
UNIPETROL	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
VIG	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
PX	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Bezriz.akt.	0.109	0.903	0.842	0.778	0.840	0.682	1.000	0.056
Str.hodn.	1.454	0.296	0.386	0.480	0.391	0.589	0.167	1.511
Rozptyl	63.296	0.717	1.829	3.738	1.915	7.490	0.000	67.735

Výsledky optimalizačných úloh pre dáta s bezrizikovým aktívom

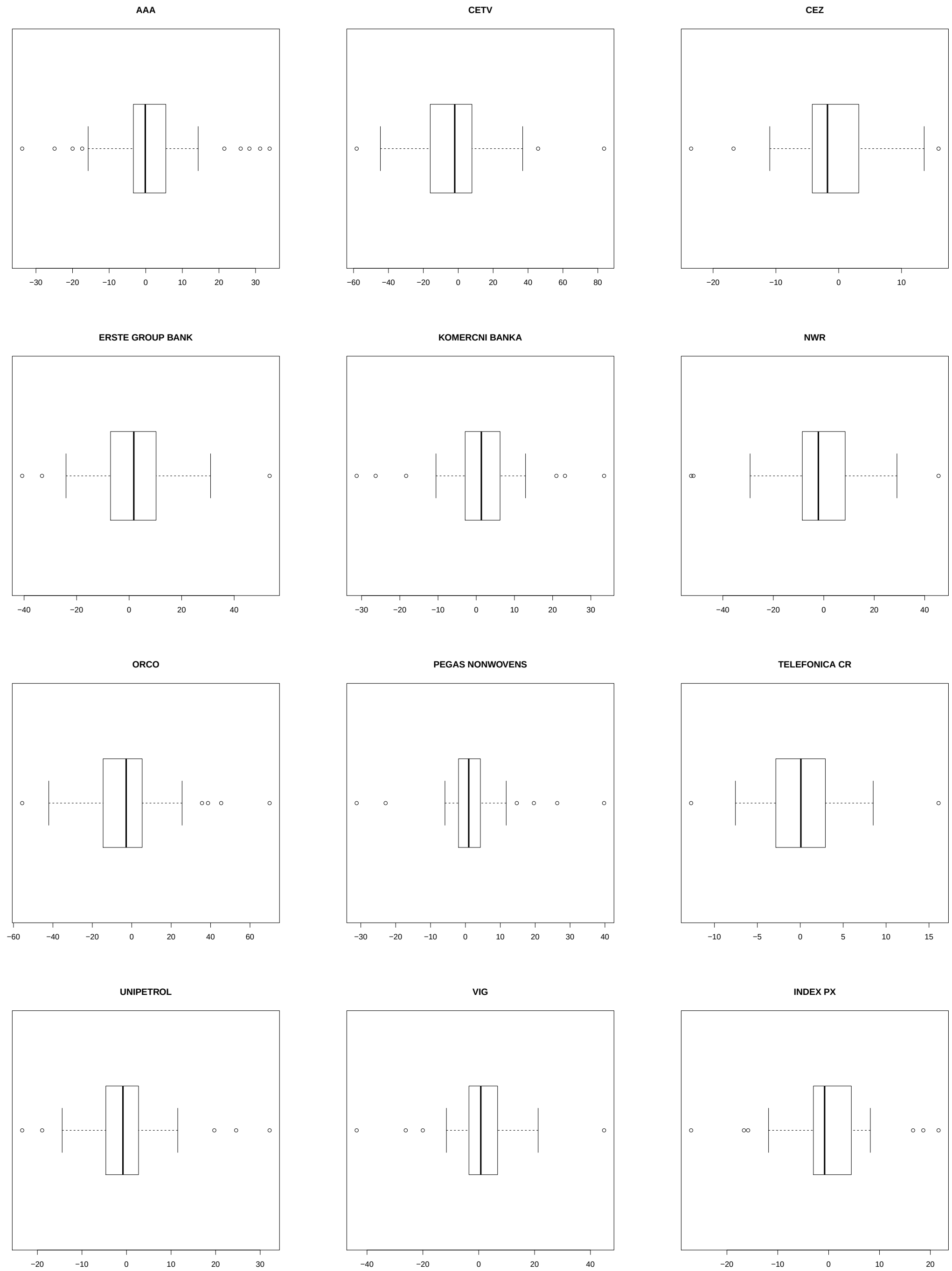
Formulované úlohy sme vyriešili aj po pridaní bezrizikového aktíva (Český štátny dlhopis s ročným výnosom 2%). Najvyššiu strednú hodnotu výnosu a rozptylu znova dosahujú optimálne riešenia úloh 6b-7b-8a a 1c. Stredná hodnota a rozptyl je rádovo podobná ako pre úlohy bez bezrizikového aktíva. Ostatné úlohy s bezrizikovým aktívom "investujú" väčšinu kapitálu do bezrizikového aktíva, čo spôsobuje, že riziko je niekoľkonásobne nižšie. Investícia do bezrizikového aktíva taktiež implikuje podstatné zníženie strednej hodnoty výnosu portfólií pre uvažované úlohy.

5.3 Grafické znázornenie dát

Nasledujú súhrnné grafy priebehov mesačných relatívnych výnosov (vyjadrených v percentách) za obdobie od júla 2008 do decembra 2012 a boxploty pre všetky uvažované aktíva.



Obrázek 5.1: Relatívne výnosy českých akcií od júla 2008 do decembra 2012



Obrázek 5.2: Boxploty pre relatívne výnosy

Kapitola 6

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali úlohami optimalizácie portfólia so stochastickou dominanciou v obmedzeniach. Druhá kapitola je zameraná na stručné objasnenie teórie úžitkových funkcií a ich významu v optimalizácii portfólia. Tretia kapitola sa už zaoberá stochastickou dominanciou všetkých rádov, zavedením základných pojmov a podmienok dominancie pre diskrétne aj absolútne spojité rozdelenia. Konkrétne sa v tejto kapitole zaoberáme normálnym, lognormálnym, exponenciálnym a gamma rozdelením. Taktiež sú v tejto kapitole zhrnuté kritériá eficiencie portfólií. V ďalšej kapitole sa už venujeme formulácii optimalizačných úloh so stochastickou dominanciou druhého rádu v obmedzeniach. Sformulovali sme 4 rôzne optimalizačné úlohy pre diskrétne pravdepodobnostné rozdelenia, ktoré zahrňujú obmedzenia na dominanciu SSD a previedli ich na úlohy lineárneho programovania. Prvá úloha je zameraná na maximalizáciu strednej hodnoty výnosu, druhá počíta s nepatrným rozdielom od referenčného aktíva, tretia formulácia ponúka investorovi možnosť priložiť scénárom rôznu dôležitosť (napr. starším scénárom priložiť nižšiu dôležitosť) a posledná formulácia je zameraná na prácu s dátami, ktoré môžu obsahovať zaokrúhľovacie chyby a taktiež ponúka priestor na nepriame zahrnutie neznámych transakčných nákladov. Pri formulácii ďalších úloh sme využili vzťah stochastickej dominancie druhého rádu a miery rizika Conditional Value at Risk. Sformulovali sme model, ktorý sa zameriava na maximalizáciu rozdielu CVaR-ov referenčného aktíva a CVaR-ov hľadaného portfólia. Optimalizačnú úlohu sme odvodili pre diskrétne scénáre a aj pre normálne, Študentovo a všeobecné eliptické rozdelenie. Nakoniec sme po prepise CVaR-u pre jednotlivé rozdelenia a vyriešení minimalizačnej úlohy prišli k záveru, že sa pre normálne, Študentovo a všeobecné eliptické rozdelenie dostávame k rovnakej optimalizačnej úlohe. V poslednej kapitole sme formulácie zo štvrtej kapitoly vyriešili pomocou optimalizačného softvéru GAMS. Úlohy sme riešili pre mesačné relatívne výnosy českých akcií (vyjadrené v percentách) aj so zahrnutím bezrizikového aktíva aj bez a za referenčné aktívum sme zvolili index PX. Pred samotným riešením úloh sme sa ešte venovali aj analýze dát (test časovej nekorelovanosti, test normálneho a Študentovho rozdelenia,atd.).

Zhrnutie výsledkov úloh bez zahrnutia bezrizikového aktíva:
Optimálne portfólio Model-u 1c má druhú najvyššiu strednú hodnotu výnosu a druhý najväčší rozptyl. Model 2c našiel scénár, pre ktorý je rozdiel medzi referenčným aktívom a hľadaným portfóliom najväčší (obdobie august 2008). Medzi výsledkami úloh 3b-1 a 3c je len nepatrný rozdiel, pretože pre obe úlohy používame dáta zoradené podľa dátumu. Model 3b-2 používa dáta zoradené vzostupne podľa výnosu referenčného aktíva, preto má podstatne vyššiu strednú hodnotu výnosu optimálneho portfólia. Úloha 4b, ktorá je založená na maximalizácii LPM pre posledné pozorovanie, má jednu z najvyšších stredných hodnôt výnosu a vysoké riziko. Skladá sa z aktív, ktoré mali s ohľadom na splnenie podmienok na stochastickú dominanciu najvyššie výnosy v decemberi 2012. Naopak najnižšiu strednú hodnotu výnosu (aj riziko) má Model 5d. Pri porovnaní Modelu 5d (formulovaný pre diskrétne rozdelenie) a Modelu 6b-7b-8a (predpoklad absolútne spojitého rozdelenia nie je splnený) pozorujeme značný rozdiel, ktorý je spôsobený nesplnením predpokladov úlohy 6b-7b-8a na rozdelenie výnosov (resp.straty).

Zhrnutie výsledkov úloh so zahrnutím bezrizikového aktíva:
Podobne ako bez zahrnutia bezrizikového aktíva majú najvyššiu (a aj rádovo podobnú) strednú hodnotu výnosu a rozptyl optimálne riešenia úloh 6b-7b-8a a 1c. Ostatné úlohy s bezrizikovým aktívom "navrhujú" investovať väčšinu kapitálu do bezrizikového aktíva, čo spôsobuje, že riziko optimálnych riešení je niekoľkonásobne nižšie ako pre úlohy 6b-7b-8a a 1c. Investícia do bezrizikového aktíva taktiež implikuje podstatné zníženie strednej hodnoty výnosu portfólií pre uvažované úlohy.

Kapitola 7

Príloha

Obsah priloženého CD

CD priložené k práci obsahuje:

- Diplomovú prácu vo formáte pdf.
- Použité dáta v súboroch typu MS Excel.
- Zdrojové kódy optimalizačných úloh pre softvér GAMS.
- Zdrojové kódy pomocných výpočtov pre štatistický software R.

Literatura

[1] Ali M.: *Stochastic dominance and portfolio analysis*, Journal of Financial Economics 2(2), 1975, 205-229

[2] Bawa V. S.: *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospect*, Journal of Financial Economics 2, 1975, 95-121

[3] Dentcheva D., Ruszczyński A.: *Portfolio Optimization with Stochastic Dominance Constraints*, Journal of Banking and Finance 30/2, 2006, 433 - 451

[4] Dentcheva D., Ruszczyński A.: *Semi-Infinite Probabilistic Optimization: First Order Stochastic Dominance Constraints*, Optimization 53, 2004, 583 - 601

[5] Dorová B.: *Kellyho kritérium v úlohách optimalizace portfolia*, Bakalárská práce, MFF UK v Praze, 2011

[6] Dungl M.: *Vliv volby generátoru stochastické dominance na eficienci portfolií*, Diplomová práce, MFF UK v Praze, 2009

[7] Dupačová J., Hurt J., Štepán J.: *Stochastic modeling in economics and finance*, Kluwer Academic Publishers, 2002

[8] Franěk P., Janečková H.: *Finanční matematika I.*, Praha, 2003

[9] Fryšová, Hantych, Charamza, Kadlčák, Klicnar, Mydlo, Pavlicová, Popela, Tlustý, Večeř : *Modelovací systém GAMS*, MFF UK v Praze, 1993

[10] Dupač V., Hušková M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, skripta, Karolinum, Praha, 1999

[11] Jakubcová M.: *Míry eficience portfolia vzhledem k stochastické dominanci*, Diplomová práce, MFF UK v Praze, 2008

[12] Klouda L.: *Semi-infinitní programování: teorie a aplikace na eficientní portfolia*, Diplomová práce, MFF UK v Praze, 2012

[13] Kopa M.: *Úžitkové funkcie a optimalizácia portfólia*, Rigorózna práca, MFF UK v Praze, 2004

[14] Kopa M., Post T.: *A portfolio optimality test based on the First-order stochastic dominance criterion*, Journal of Finantial and Quantitative Analysis 4(5), 2009, 1103-1124

[15] Kopa M., Chovanec P.: *A Second-Order Stochastic Dominance Portfolio Efficiency Measure*, Kybernetika 44(2), 2008, 243-258

[16] Kozmik V.: *Eficience portfolií pri spojitém rozdelení výnosu*, Diplomová práce, MFF UK v Praze, 2010

[17] Kuosmanen, T.: *Efficient diversification according to stochastic dominance criteria*, Management Science 50, 2004, 1390-1406

[18] Levy H.: *Stochastic Dominance: Investment decision making under uncertainty*, Springer, New York, 2006

[19] Levy H., Hanoch G.: *Relative Efectiveness of Eficiency Criteria for Portfolio Selection*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 1, 1970, 63-76

[20] Markowitz H. M.: *Portfolio Selection*, Journal of Finance 1, 1952, 77-91

[21] Markowitz H. M.: *Portfolio Selection: Effcient Diversification in Investment*, Wiley, New York, 1959

[22] Mikulka J.: *Stochastická dominance vyšších řádu*, Diplomová práce, MFF UK v Praze, 2011

[23] Noyan N., Ruszczynski A.: *Valid inequalities and restrictions for stochastic programming problems with first order stochastic dominance constraints*, Mathematical Programming 115, 2008, 249 - 275

[24] Post T.: *Empirical tests for stochastic dominance efficiency*, Journal of Finance 58, 2003, 1905-1932

[25] Rockafellar R. T., Uryasev S.: *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk 2, 2000, 21-41

[26] Savitsky A.G., McKinney D.C.:*GAMS tutorials for beginners*, 1999

[27] Ogryczak W., Ruszczynski A.: *Dual stochastic dominance and related mean-risk models*, SIAM Journal on Optimization 13, 2002, 60-78

[28] Whitmore, G. A.: *Stochastic Dominance for the Class of Completely Monotonic Utility Functions*, Studies in the Economics of Uncertainty (T. B. Fomby and T. K. Seo, eds.) , Springer-Verlag, New York, 1989, 77-88

[29] Ziemba W.T., Jarrow R.A., Maksimovic V.: *Finance*, Elsevier B.V., 1995

[30] Neumann J., Morgenstern O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944